# ZEITSCHRIFT FÜR ANGEWANDTE MATHEMATIK UND MECHANIK

INGENIEURWISSENSCHAFTLICHE FORSCHUNGSARBEITEN

Band 7 | August 1927 | Heft 4

Inhalt:



## HAUPTAUFSÄTZE

### Beitrag zur theoretischen Behandlung des gegenseitigen Einflusses von Tragfläche und Rumpf.

Von J. LENNERTZ in Aachen.

Bei einem Flugzeug beeinflussen sich Rumpf und Tragfläche gegenseitig in Bezug auf die Luftkräfte, die an ihnen auftreten. Dieser Einfluß ist in verschiedenen Versuchen festgestellt worden[1]). Theoretisch hat man bisher die Fragen nach dem gegenseitigen Einfluß von Tragfläche und Rumpf noch nicht angeschnitten. Die exakte Behandlung dieser Frage führt auf außerordentlich große Schwierigkeiten, und wie bei andern Problemen der Aerodynamik wird auch bei dieser Frage die numerische Rechnung nur durch eine Reihe von vereinfachenden Annahmen ermöglicht.

In den folgenden Untersuchungen, deren Anregung ich Herrn Prof. von Kármán verdanke, ist die Frage nach dem gegenseitigen Einfluß von Tragfläche und Rumpf für stationäre Strömung behandelt. Die Grundlage der Berechnung bilden die Annahmen der Prandtlschen Tragflächentheorie[2]). Auch hiermit ist das Problem für die gebräuchlichen Rumpfformen noch recht kompliziert. Daher ist in den folgenden Rechnungen eine stark idealisierte Rumpfform zugrunde gelegt. In den meisten behandelten Fällen ist als Rumpf ein Zylinder angenommen, der sich beiderseits ins Unendliche erstreckt und dessen Achse in die Bewegungsrichtung des Flugzeuges fällt. Mit dieser Annahme ergibt sich eine Flüssigkeitsbewegung, welche angenähert der Strömung bei langgestrecktem Rumpf in der Nähe der Tragfläche entspricht.

In dieser Arbeit ist der gegenseitige Einfluß von Tragfläche und Rumpf zunächst für den Fall einer unendlich breiten Tragfläche behandelt; hierbei ist als Rumpf zunächst eine Kugel und dann ein Zylinder angenommen. Weiterhin ist für zylindrischen Rumpf mit endlich breiter Tragfläche von gleichmäßig verteilter Zirkulation der Gesamtauftrieb

---

[1]) Siehe Fuchs-Hopf, Aerodynamik 1922, S. 216; Literaturangabe daselbst S. 458.

[2]) Prandtl, Tragflügeltheorie I, Nachr. d. Ges. d. Wiss. zu Göttingen 1918, S. 451;
» » II, ebenda 1919, S. 107.

Vergleiche hierzu auch Aufsätze von Fuchs, diese Zeitschr. Bd. 1 (1921), S. 106 und von Trefftz, ebenda Bd. 1 (1921), S. 206.

und die vom Rumpf herrührende Aenderung des Tragflächenwiderstandes sowie deren Verteilung über die Breite ermittelt; hierbei ist auch der Einfluß der Höhenlage der Tragfläche berücksichtigt. Sodann wird die Frage nach der Zirkulationsverteilung behandelt, die bei gegebenem Gesamtauftrieb den kleinsten Widerstand ergibt. Schließlich folgt noch eine Untersuchung der Auftriebsverteilung in der Längsrichtung des Rumpfes.

Die Ergebnisse sind als Näherungswerte bei langgestrecktem Rumpf anzusehen und ebenfalls anwendbar auf Luftschiffe, die mit Flossen versehen sind.

**1. Grundlagen der Berechnung.** In einer idealen Flüssigkeit ergeben sich bei stationärer Bewegung von Tragflächen Auftrieb und Widerstand, wenn man eine Zirkulationsbewegung um die Tragfläche sowie eine Ablösung von Wirbeln an der Hinterkante der Tragfläche annimmt. Die Flüssigkeitsbewegung ist dann außerhalb der Tragfläche und des von den freien Wirbeln erfüllten Raumes eine Potentialströmung. Die freien Wirbel werden von der Strömung mitgenommen und bilden in ihrer Gesamtheit eine Unstetigkeitsfläche für das Potential. Hierin ist der Potentialsprung längs einer Wirbellinie konstant und gleich der Zirkulation um das Tragflächenelement, von dem diese Wirbellinie ausgeht.

Mit Prandtl setzen wir nun eine Grundströmung voraus, gegen deren Geschwindigkeit sämtliche Zusatzgeschwindigkeiten klein sind. Daher machen wir die Annahme, daß die an der Hinterkante der Tragfläche abgehenden freien Wirbel von der Grundströmung geradlinig mitgeführt werden. Es ergibt sich demnach hinter der Tragfläche ein Wirbelband, das bei geradliniger Hinterkante der Tragfläche eben angenommen wird. Weiterhin setzen wir voraus, daß die Tiefe der Tragflächen im Verhältnis zur Breite klein ist, so daß wir die Tragfläche durch eine »tragende Linie« ersetzen können. Diese tragende Linie ist der Träger der gebundenen Wirbel, welche die Zirkulationsbewegung der Strömung um die Tragfläche erzeugen. Die von der Tragfläche herrührende Wirbelbewegung ruft nun am Rumpf eine Geschwindigkeit hervor, deren Komponente normal zur Rumpfoberfläche nicht überall verschwindet. Daher ist noch die Ueberlagerung einer Zusatzströmung erforderlich, welche die Normalkomponente der Wirbelgeschwindigkeit am Rumpf aufhebt, die in unendlicher Entfernung vom Rumpf jedoch keinen Einfluß ausübt. Diese Zusatzströmung besitzt außerhalb des Rumpfes ein Geschwindigkeitspotential.

Auftrieb und Widerstand an den Tragflächen lassen sich nun in der von Prandtl angegebenen Weise berechnen. Es ergibt sich noch im allgemeinen, daß die vorhin genannte Zusatzströmung eine Abwärtsgeschwindigkeit an der Tragfläche hervorbringt. Dadurch würde der Rumpf eine Aenderung des effektiven Anstellwinkels sowie einen Widerstand an der Tragfläche hervorbringen. Die auf den Rumpf wirkende Luftkraft ergibt sich durch Benutzung der Bernoullischen Beziehung. Bei den gebräuchlichen Rumpfformen würde sich am Rumpf sowohl ein Auftrieb als auch ein Widerstand ergeben. Mit unserer Annahme eines zylindrischen Rumpfes verschwindet jedoch die Widerstandskomponente, und wir erhalten am Rumpf lediglich einen Auftrieb.

Für die folgenden Berechnungen legen wir ein kartesisches Koordinatensystem derart fest: Die $x$-Achse falle in die Längsachse des Rumpfes und zwar positiv in die Bewegungsrichtung des Flugzeuges. Die $y$-Achse verlaufe in die Richtung der Breite, und zwar nach rechts positiv, wenn man in die positive $x$-Richtung schaut. Die $z$-Achse gehe senkrecht nach oben, also in Richtung des Auftriebes (siehe Abb. 1).

**2. Kugel und unendlich breite Tragfläche.** Die Ermittlung des gegenseitigen Einflusses von Tragfläche und Rumpf gestaltet sich am einfachsten für folgende Anordnung: Der Rumpf sei eine Kugel vom Radius $R$, deren Mittelpunkt auf der Profilmittellinie der Tragfläche liegt; die Tragfläche wird unendlich breit angenommen mit gleichmäßiger Zirkulationsverteilung. Wir ersetzen nun die Tragfläche durch einen geradlinigen Wirbelfaden, der durch den Rumpf hindurch geht und dessen Zirkulation $\Gamma$ sich nach der Kutta-Joukowskischen Theorie ergibt. Den Mittelpunkt der Kugel machen wir zum Nullpunkt unseres Koordinatensystems, so daß der Wirbelfaden in der $y$-Achse liegt. Die vollständige Strömung ergibt sich durch Ueberlagerung der Zirkulationsströmung des Wirbelfadens mit einer Potentialströmung, die im Unendlichen die Anblasegeschwindigkeit $V$ in Richtung der negativen $x$-Achse hat und an der Kugeloberfläche die Randbedingung befriedigt.

Infolge des Wirbelfadens macht jedes Flüssigkeitsteilchen eine Kreisbewegung um die $x$-Achse mit der konstanten Geschwindigkeit $w = \frac{\Gamma}{2\pi\sqrt{x^2+z^2}}$. Die Potentialfunktion, die diese Bewegung ergibt, lautet:

$$\varphi_0 = \frac{\Gamma}{2\pi} \operatorname{arctg} \frac{z}{x} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1).$$

Führen wir nun Polarkoordinaten $r$, $\eta$, $\vartheta$ ein durch die Gleichungen

$$x = r\cos\eta, \qquad y = r\sin\eta\cos\vartheta, \qquad z = r\sin\eta\sin\vartheta,$$

so wird

$$\varphi_0 = \frac{\Gamma}{2\pi} \operatorname{arctg}(\sin\vartheta \operatorname{tg}\eta) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1a).$$

Infolge der Zirkulationsbewegung um die Tragfläche ergibt sich mithin keine Geschwindigkeitskomponente in der radialen Richtung, also auch keine Geschwindigkeitskomponente normal zur Kugeloberfläche. Wir erhalten daher die Potentialfunktion der vollständigen Strömung, wenn wir zu $\varphi_0$ die Dirichletsche Lösung der Potentialströmung um die Kugel addieren. Die Potentialfunktion der vollständigen Strömung lautet also:

$$\Phi = \frac{\Gamma}{2\pi} \operatorname{arctg}(\sin\vartheta \operatorname{tg}\eta) - V r\cos\eta\left(1 + \frac{1}{2}\frac{R^3}{r^3}\right) \quad \ldots\ldots \quad (2).$$

Die Dirichletsche Potentialfunktion liefert bekanntlich keinerlei Kraftwirkung auf die Kugel. Es entsteht also nur dadurch ein Auftrieb an der Kugel, daß der Zirkulationsströmung um die Tragfläche eine Parallelströmung überlagert ist. Demnach ergibt sich bei einer Kugel mit unendlich breiter Tragfläche derselbe Auftrieb am Rumpf, als wenn die Kugel durch ein Tragflächenstück von der Breite $2R$ ersetzt würde, nämlich:

$$A_R = \varrho V \Gamma \cdot 2R \quad \ldots\ldots \quad (3).$$




Es bleibt noch zu untersuchen, ob von der Kugel ein Einfluß an der Tragfläche ausgeübt wird. Das wäre der Fall, wenn die Dirichletsche Potentialfunktion an der Tragfläche eine Geschwindigkeitskomponente in der $z$-Richtung ergäbe und dadurch eine Aenderung des effektiven Anstellwinkels bedingen würde. Nun ist diese Geschwindigkeitskomponente

$$v_z = \frac{3}{2} V x z \frac{R^3}{r^5}.$$

Dies verschwindet an der Tragfläche, das heißt für $x = 0$ und $z = 0$. Ein Einfluß auf die unendlich breite Tragfläche wird also durch die Kugel nicht ausgeübt.

**3. Zylindrischer Rumpf mit unendlich breiter Tragfläche.** Wir nehmen wieder eine unendlich breite Tragfläche an, die wir durch einen den Rumpf durchsetzenden geradlinigen Wirbelfaden von der gleichmäßigen Zirkulation $\Gamma$ ersetzen. Der Rumpf sei ein Kreiszylinder vom Radius $R = 1$, der sich beiderseits ins Unendliche erstreckt. Die Anordnung der Tragfläche am Rumpf sei derart, daß die Profilmittellinie der Tragfläche die Zylinderachse schneidet. Wir legen entsprechend unserer früheren Festsetzung die $x$-Achse in die Zylinderachse und die $y$-Achse in die Mittellinie der Tragfläche (Abb. 1).

Nun ermitteln wir das Geschwindigkeitsfeld in der oben angegebenen Weise; wir setzen also die Geschwindigkeit der vollständigen Strömung folgendermaßen an:

$$\mathfrak{v} = \mathfrak{V} + \mathfrak{w} + \mathfrak{u} \quad \ldots\ldots \quad (4).$$

Hierin bedeutet $\mathfrak{V}$ den Geschwindigkeitsvektor der Grundströmung, $\mathfrak{w}$ den Geschwindigkeitsvektor infolge

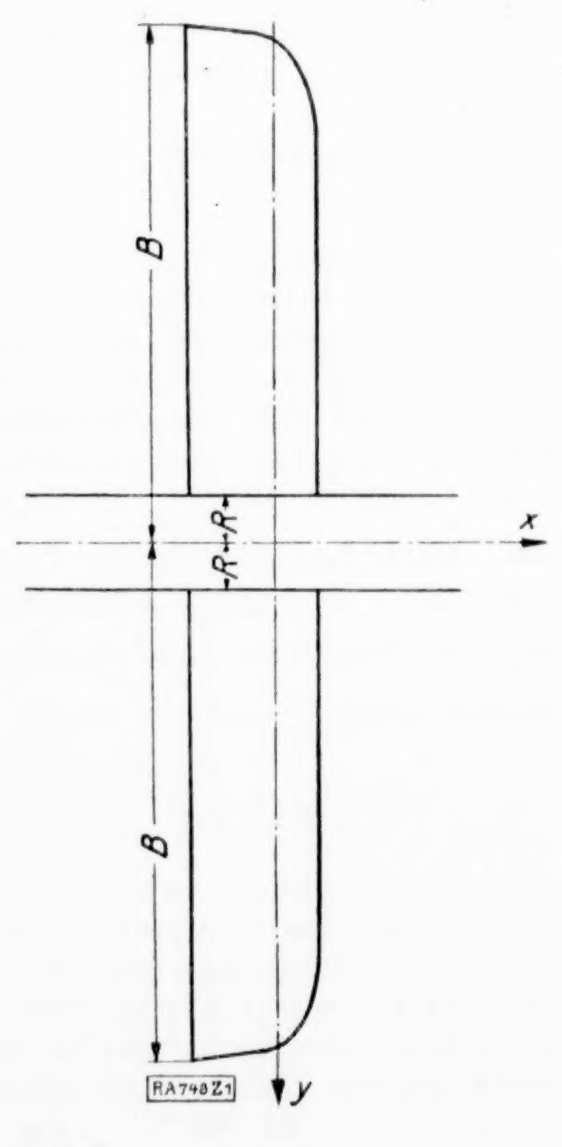



Abb. 1.

des Wirbelfadens und $\mathfrak{u}$ den Geschwindigkeitsvektor der Zusatzströmung. Die Potentialfunktion der vollständigen Strömung setzen wir in entsprechender Weise an:

$$\varphi = -Vx + \varphi_0 + \varphi_1 \quad \ldots \ldots \quad (4a).$$

Die Potentialfunktion $\varphi_0$ der Zirkulationsbewegung um die Tragfläche ist durch die Gl. (1) ausgedrückt. Wir führen nun Zylinderkoordinaten $x, r, \vartheta$ ein durch die Gleichungen:

$$x = x, \quad y = r\cos\vartheta, \quad z = r\sin\vartheta \quad \ldots \ldots \quad (5).$$

Hiermit ergibt sich die Potentialfunktion für den Wirbelfaden zu:

$$\varphi_0 = \frac{\Gamma}{2\pi}\operatorname{arctg}\frac{r\sin\vartheta}{x} \quad \ldots \ldots \quad (6).$$

An der Zylinderoberfläche, das heißt bei $r = 1$, hat demnach die Zirkulationsströmung um den Wirbelfaden eine Normalkomponente der Geschwindigkeit:

$$w_n = \frac{\Gamma}{2\pi}\frac{x\sin\vartheta}{x^2 + \sin^2\vartheta}.$$

Infolge der Symmetrie der Strömung um die $xz$-Ebene läßt sich $w_n$ in einer Sinus-Reihe entwickeln, und wir erhalten

$$w_n = \frac{\Gamma}{2\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\sin k\vartheta \cdot \mathfrak{f}_k(x) \quad \ldots \ldots \quad (7a)$$

mit

$$\mathfrak{f}_k(x) = \frac{x}{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\sin\vartheta\sin k\vartheta}{x^2 + \sin^2\vartheta}\,d\vartheta \quad \ldots \ldots \quad (7b).$$

Es ist nun erforderlich, die Potentialfunktion $\varphi_1$ so zu bestimmen, daß ihre Geschwindigkeit $\mathfrak{u} = \operatorname{grad}\varphi_1$ in unendlicher Entfernung vom Rumpf verschwindet. Ferner muß an der Oberfläche des Zylinders $w_n = -u_n$ sein. Diese Bedingung läßt sich dadurch erfüllen, daß man $\mathfrak{f}_k(x)$ als Fourier-Integral darstellt, also

$$\mathfrak{f}_k(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}d\lambda\int_{-\infty}^{\infty}\mathfrak{f}_k(\mu)\cos\lambda(x-\mu)\,d\mu.$$

Bezeichnet nun $H_k^{(1)}(i\lambda r)$ die Hankelsche Funktion erster Art der Ordnung $k$ mit dem Argument $i\lambda r$, worin $i$ die imaginäre Einheit ist, so ergibt sich

$$\varphi_1 = \frac{\Gamma}{2\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\sin k\vartheta\int_0^{\infty}d\lambda\int_{-\infty}^{\infty}\mathfrak{f}_k(\mu)\frac{H_k^{(1)}(i\lambda r)}{k H_k^{(1)}(i\lambda) - i\lambda H_{k-1}^{(1)}(i\lambda)}\cos\lambda(x-\mu)\,d\mu \quad . \quad (8).$$

Die Potentialfunktion $\varphi = -Vx + \varphi_0 + \varphi_1$ liefert uns also mit den Ausdrücken (6) und (8) die vollständige Strömung.

Nun gehen wir zur Ermittlung der Luftkräfte über, die infolge der gefundenen Strömung an der Tragfläche wirken. Durch die Ueberlagerung des Geschwindigkeitsfeldes $\mathfrak{V}$ mit dem Geschwindigkeitsfeld $\mathfrak{w}$ entsteht an der Tragfläche ein Auftrieb, der nach der Kutta-Joukowskischen Theorie an einem Element $dy$ der Breite den Betrag

$$dA = \varrho V\Gamma\,dy \quad \ldots \ldots \quad (9)$$

hat. Diese Luftkraft an der Tragfläche wird vom Rumpf beeinflußt, wenn das Geschwindigkeitsfeld $\mathfrak{u}$ eine Vertikalkomponente $u_z$ an der Tragfläche hat. Die Komponente $u_z$ ist an der Tragfläche der Geschwindigkeitskomponente $u_t = \frac{1}{r}\frac{\partial\varphi_1}{\partial\vartheta}$ gleich bzw. entgegengesetzt gleich. Aus (8) folgt:

$$\frac{\partial\varphi_1}{\partial\vartheta} = \frac{\Gamma}{2\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}k\cdot\cos k\vartheta\int_0^{\infty}d\lambda\int_{-\infty}^{\infty}\mathfrak{f}_k(\mu)\frac{H_k^{(1)}(i\lambda r)}{k\cdot H_k^{(1)}(i\lambda) - i\lambda H_{k-1}^{(1)}(i\lambda)}\cos\lambda(x-\mu)\,d\mu \quad (10).$$

An der Tragfläche wird dies gleich Null, weil $\mathfrak{f}_k(\mu) = -\mathfrak{f}_k(-\mu)$ und $x = 0$ werden. Ein Einfluß des Rumpfes auf die Luftkraft an der Tragfläche findet demnach nicht statt.

Nun versuchen wir den Auftrieb am Rumpf zu berechnen. Wenn $p$ den Flüssigkeitsdruck und $d\mathfrak{F}$ den zur Rumpfachse weisenden Flächenvektor eines Oberflächenelementes bezeichnet, ergibt sich mit Benutzung der Bernoullischen Beziehung die Kraft auf ein Element des Rumpfes zu:

$$d\mathfrak{K} = p\,d\mathfrak{F} = -\frac{\varrho}{2}v^2\,d\mathfrak{F} + \text{konst}\,d\mathfrak{F}.$$

Eine Widerstandskomponente tritt am unendlich langen Zylinderrumpf nicht auf. Die $y$-Komponenten von $d\,\mathfrak{K}$ sind beiderseits des Rumpfes entgegengesetzt gleich wegen der Symmetrie der Strömung. Wir erhalten also am Zylinderrumpf lediglich einen Auftrieb, der an einem Flächenelement den Betrag

$$d\,A = \frac{\varrho}{2}\, v^2 \sin\vartheta\, d\,\vartheta\, d\,x - \text{konst} \cdot \sin\vartheta\, d\,\vartheta\, d\,x$$

hat. Durch Integration über die ganze Zylinderfläche würde sich hieraus der gesamte Auftrieb des Rumpfes ergeben. Wir führen nun zunächst die Integration nach $\vartheta$ durch und erhalten dadurch die Auftriebsverteilung in der Längsrichtung des Rumpfes:

$$A'(x) = \frac{\varrho}{2} \int_0^{2\pi} v^2 \sin\vartheta\, d\,\vartheta \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (11).$$

An der Oberfläche des Rumpfes ist nun

$$v^2 = (-V + w_x + u_x)^2 + v_t^2.$$

Für die einzelnen Geschwindigkeitskomponenten an der Rumpffläche bestehen nun laut (6) und (8) die Ausdrücke:

$$\left.\begin{aligned} w_x &= -\frac{1}{x}\, w_n = -\frac{\Gamma}{2\pi x} \sum_{k=1}^{\infty} \sin k\,\vartheta \cdot \mathfrak{f}_k(x), \\ u_x &= \frac{\Gamma}{2\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \sin k\,\vartheta \cdot h_k(x), \qquad v_t = \frac{\Gamma}{2\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \cos k\,\vartheta \cdot j_k(x) \end{aligned}\right\} \quad . \; . \quad (12).$$

Hiermit wird:

$$v^2 = V^2 + \frac{\Gamma^2}{4\pi^2}\left[\sum_{k=1}^{\infty} \sin k\,\vartheta \left\{ h_k(x) - \frac{1}{x}\,\mathfrak{f}_k(x)\right\}\right]^2 + \frac{\Gamma^2}{4\pi^2}\left[\sum_{k=1}^{\infty} \cos k\,\vartheta \cdot j_k(x)\right]^2$$
$$+ \frac{\Gamma}{\pi}\, V \sum_{k=1}^{\infty} \sin k\,\vartheta \left\{ \frac{1}{x}\,\mathfrak{f}_k(x) - h_k(x) \right\}.$$

Setzt man diesen Ausdruck in (11) ein, so verschwinden bei der Integration nach $\vartheta$ sämtliche Glieder bis auf diejenigen mit $\int_0^{2\pi} \sin^2\vartheta\, d\,\vartheta$ und es wird daher:

$$A'(x) = \varrho\, V\, \Gamma/2\, [1/x\; \mathfrak{f}_1(x) - h_1(x)] \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (13).$$

Wir erhalten also den Anteil des Wirbelfadens an der Auftriebsverteilung längs des Rumpfes:

$$P_1(x) = \varrho\, V \frac{\Gamma}{2\,x}\, \mathfrak{f}_1(x) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (13\,\text{a})$$

und den Anteil des Geschwindigkeitsfeldes $\mathfrak{u}$:

$$P_2(x) = -\,\varrho\, V \frac{\Gamma}{2}\, h_1(x) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (13\,\text{b}).$$

Zunächst errechnen wir den Anteil des Geschwindigkeitsfeldes $\mathfrak{w}$. Nach (7b) wird:

$$\mathfrak{f}_1(x) = \frac{x}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\sin^2\vartheta}{x^2 + \sin^2\vartheta}\, d\,\vartheta.$$

Mit $\vartheta = \alpha/2$ wird:

$$\mathfrak{f}_1(x) = \frac{x}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1 - \cos\alpha}{2\,x^2 + 1 - \cos\alpha}\, d\,\alpha = 2\,x\left[1 - \frac{1}{\sqrt{1 + 1/x^2}}\right] \quad . \; . \; . \; . \quad (14).$$

Demnach ist die vom Wirbelfaden herrührende Auftriebsverteilung:

$$P_1(x) = \varrho\, V\, \Gamma \left[1 - \frac{1}{\sqrt{1 + 1/x^2}}\right] \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (15).$$

Der hieraus folgende Auftrieb am Rumpf ist:

$$A_1 = \varrho\, V\, \Gamma \int_{-\infty}^{\infty} \left[1 - \frac{1}{\sqrt{1 + 1/x^2}}\right] d\,x.$$

Es wird also:

$$A_1 = \lim_{l = \infty}\, 2\,\varrho\, V\, \Gamma\, [l - \sqrt{1 + l^2} + 1].$$

Demnach ergibt sich der Rumpfauftrieb, der vom Wirbelfaden herrührt, zu:

$$A_1 = 2\,\varrho\,V\,\Gamma \quad . \quad . \quad . \quad (16).$$

Berücksichtigen wir, daß der Rumpf die Breite 2 hat, so ergibt sich vollständige Uebereinstimmung dieses Ausdruckes mit (9).

Nun wäre noch der Einfluß $P_2$ vom Geschwindigkeitsfeld $\mathfrak{u}$ zu berechnen. Aus (8) folgt:

$$u_x = \frac{\partial \varphi_1}{\partial x}\bigg|_{r=1} = -\frac{\Gamma}{2\,\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\sin k\,\vartheta\int_0^{\infty} d\,\lambda\int_{-\infty}^{\infty}\mathfrak{f}_k(\mu)\,\frac{H_k^{(1)}(i\,\lambda)}{k\cdot H_k^{(1)}(i\,\lambda) - i\,\lambda\cdot H_{k-1}^{(1)}(i\,\lambda)}\,\lambda\cdot\sin\lambda\,(x-\mu)\,d\,\mu.$$

Demnach wird:

$$h_1(x) = -\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} d\,\lambda\int_{-\infty}^{\infty}\mathfrak{f}_1(\mu)\,\frac{H_1^{(1)}(i\,\lambda)}{H_1^{(1)}(i\,\lambda) - i\,\lambda\cdot H_0^{(1)}(i\,\lambda)}\,\lambda\,\sin\lambda\,(x-\mu)\,d\,\mu.$$

Wir berücksichtigen, daß infolge $\mathfrak{f}_1(\mu) = -\mathfrak{f}_1(-\mu)$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\mathfrak{f}_1(\mu)\cos\lambda\,\mu\,d\,\mu = 0$$

und

$$\int_{-\infty}^{\infty}\mathfrak{f}_1(\mu)\sin\lambda\,\mu\,d\,\mu = 2\int_0^{\infty}\mathfrak{f}_1(\mu)\sin\lambda\,\mu\,d\,\mu = 2\,\psi(\lambda)$$

wird. Es ergibt sich hiermit:

$$P_2(x) = -\varrho\,V\frac{\Gamma}{\pi}\int_0^{\infty}\psi(\lambda)\,\frac{\lambda\cdot H_1^{(1)}(i\,\lambda)}{H_1^{(1)}(i\,\lambda) - i\,\lambda\cdot H_0^{(1)}(i\,\lambda)}\cos\lambda\,x\,d\,\lambda \quad . \quad . \quad . \quad (17).$$

Die Auswertung dieses Integrals ist uns nicht möglich. Wir sehen jedoch, daß $P_2(x)$ eine gerade Funktion von $x$, also $P_2(x) = P_2(-x)$ ist. Wir sind aber auch in der Lage, aus (17) den Anteil des Geschwindigkeitsfeldes $\mathfrak{u}$ am gesamten Rumpf-Auftrieb festzustellen. Es ist nämlich:

$$A_2 = -2\,\varrho\,V\frac{\Gamma}{\pi}\lim_{l=\infty}\int_0^{\infty}\psi(\lambda)\,\frac{\lambda\,H_1^{(1)}(i\,\lambda)}{H_1^{(1)}(i\,\lambda) - i\,\lambda\cdot H_0^{(1)}(i\,\lambda)}\,\frac{\sin\lambda\,l}{\lambda}\,d\,\lambda.$$

Der Grenzwert des Integrals drückt sich nach Dirichlet aus durch

$$\frac{1}{2}\,\chi(\lambda) = \frac{1}{2}\,\psi(\lambda)\,\frac{\lambda\,H_1^{(1)}(i\,\lambda)}{H_1^{(1)}(i\,\lambda) - i\,\lambda\cdot H_0^{(1)}(i\,\lambda)}$$

für das Argument $\lambda = 0$ [1]). Da nun

$$\psi(\lambda) = \int_0^{\infty}\mu\left[1 - \frac{\mu}{\sqrt{1+\mu^2}}\right]\sin\lambda\,\mu\,d\,\mu$$

ein konvergentes Integral ist und für $\lambda = 0$ noch

$$\frac{H_1^{(1)}(i\,\lambda)}{H_1^{(1)}(i\,\lambda) - i\,\lambda\cdot H_0^{(1)}(i\,\lambda)}\bigg|_{\lambda=0} = \lim_{\lambda=0}\frac{1}{1-\lambda^2\ln\dfrac{2}{\gamma\,\lambda}} = 1$$

gilt, wird $\chi(0) = 0$ und mithin

$$A_2 = 0 \quad . \quad . \quad . \quad (18).$$

Der Gesamtauftrieb auf den unendlich langen Zylinderrumpf bei unendlich breiter Tragfläche ergibt sich also zu:

$$A_R = 2\,R\,\varrho\,V\,\Gamma \quad . \quad . \quad . \quad (19),$$

wenn $R$ den Radius des Rumpfes bezeichnet. Ebenso wie bei kugelförmigem Rumpf erhalten wir bei unendlich langem Zylinder für den Fall unendlich breiter Tragfläche den Auftrieb auf den Rumpf, wenn der Rumpf durch ein Tragflächenstück von der Breite des Rumpfes ersetzt würde. Ein Einfluß des Rumpfes an der Tragfläche ist hierbei nicht vorhanden.

[1]) Vergl. Riemann-Weber, Partielle Differentialgl. Bd. 1 (1910), S. 41.

**4. Gesamter Auftrieb bei unendlich langem Zylinder und endlichen Tragflächen von konstanter Zirkulationsverteilung.** Wir gehen jetzt zum Flugzeug mit endlicher Breite über und fragen zunächst nach den Luftkräften und ihrer Verteilung über die Breite, wenn die Zirkulationsverteilung über die Tragfläche bekannt ist.

Die Ermittlung der gesamten Luftkräfte geschieht durch Anwendung des Impuls- und Energiesatzes[1]). Zu diesem Zweck grenzen wir den Raum durch die Ebenen $x = \infty$ und $x = -\infty$ ab. Wir erhalten den Gesamtgewinn der eingeschlossenen Flüssigkeit an Impuls und Energie durch den Impuls- bzw. Energieüberschuß der in beiden Ebenen eintretenden Flüssigkeitsmenge gegenüber der austretenden. Die Grundströmung hat nun bei $x = \infty$ und $x = -\infty$ gleiche Geschwindigkeit, liefert also keinen Ueberschuß an Impuls oder Energie. Eine Bewegung senkrecht zur Grundströmung ist nur in der Ebene $x = -\infty$ vorhanden. Der sekundliche Impuls und die sekundliche Energie dieser Strömung liefert demnach den Gesamtgewinn der eingeschlossenen Flüssigkeit an Impuls und Energie in der Sekunde. Berücksichtigen wir noch, daß die Kontrollebene $x = -\infty$ in der Zeiteinheit sich um die Strecke $V$ verschiebt, so können wir den sekundlichen Impulsgewinn der eingeschlossenen Flüssigkeit ausdrücken durch

$$\mathfrak{J} = \varrho V \iint \mathfrak{v} \, dy \, dz$$

und den sekundlichen Energiegewinn durch

$$E = \frac{\varrho}{2} V \iint v^2 \, dy \, dz .$$

In diesen Gleichungen ist $\mathfrak{v}$ der Geschwindigkeitsvektor in der Ebene $x = -\infty$, und die Integrale sind über die gesamte von Flüssigkeit durchflossene Fläche zu erstrecken. Nach dem Impulssatz müssen nun der Impulsgewinn $\mathfrak{J}$ und die von der eingeschlossenen Flüssigkeit ausgeübten Kräfte im Gleichgewicht sein. Der gesamte Auftrieb auf Tragfläche und Rumpf ist daher

$$\mathfrak{A} = -\varrho V \iint \mathfrak{v}_z \, dy \, dz \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (20\,\mathrm{a}).$$

Nach dem Energiesatz muß ferner der Energiegewinn $E$ gleich der sekundlichen Leistung der Kräfte sein, die von der eingeschlossenen Flüssigkeit ausgeübt werden. Demnach ergibt sich der Betrag des Widerstandes zu:

$$W = \frac{\varrho}{2} \iint v^2 \, dy \, dz \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (20\,\mathrm{b}).$$

Mit Hilfe des Ausdruckes (20a) berechnen wir nun den Auftrieb für den Fall, daß die Zirkulationsverteilung über die Tragfläche konstant ist und die Profilmittellinie der Tragfläche die Rumpfachse schneidet. Die Spannweite des Flugzeuges sei $2B$ und der Radius des unendlich langen Zylinderrumpfes sei $R$. Wir ersetzen wieder die Tragfläche durch ein geradliniges Stück eines Wirbelfadens, das sich über den Bereich $-B \leqq y \leqq +B$ der $y$-Achse erstreckt. An den Enden der Tragfläche lösen sich dann freie Wirbel ab, deren Verlauf nach der Prandtlschen Theorie parallel zur $x$-Achse angenommen wird. In unendlicher Entfernung hinter der Tragfläche sind demnach 2 Wirbel von der Zirkulation $+\Gamma$ und $-\Gamma$ bei $y = +B$ bzw. $y = -B$ vorhanden. Die Potentialfunktion für diese Wirbel ist:

$$\varphi_1 = \frac{\Gamma}{2\pi}\left[\operatorname{arctg}\frac{z}{y-B} - \operatorname{arctg}\frac{z}{y+B}\right] = \frac{\Gamma}{2\pi}\operatorname{arctg}\frac{2Bz}{y^2+z^2-B^2} \quad \ldots (21\,\mathrm{a}).$$

Die Bedingung glatten Umströmens des kreisförmigen Rumpfschnittes erfüllen wir dadurch, daß wir die freien Wirbel am Kreise spiegeln. Daher müssen wir noch zu (21a) die Potentialfunktion der gespiegelten Wirbel hinzufügen, nämlich:

$$\varphi_2 = -\frac{\Gamma}{2\pi}\left[\operatorname{arctg}\frac{z}{y-\frac{R^2}{B}} - \operatorname{arctg}\frac{z}{y+\frac{R^2}{B}}\right] = -\frac{\Gamma}{2\pi}\operatorname{arctg}\frac{2\frac{R^2}{B}z}{y^2+z^2-\frac{R^4}{B^2}} \quad . (21\,\mathrm{b}).$$

Die Funktion $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$ ist also das vollständige Potential für die Strömung in der Ebene $x = -\infty$.

[1]) Vergl. hierzu Trefftz, a. a. O. S. 208.

Nun ermitteln wir zunächst die Auftriebsverteilung über die Breite, indem wir die Integration nach $z$ längs der Linien $y=\text{const}$ in (20a) ausführen. Infolge $v_z(y,z)=v_z(y,-z)$ wird das über eine durchflossene Linie $y=\text{const}$ erstreckte Integral

$$\int v_z\,dz = 2\,[\varphi\,(y,\infty) - \varphi\,(y,u)] = -\,2\,\varphi\,(y,u)$$

Hierin bedeutet $z=u$ das untere Ende der durchflossenen Linie in der oberen Halbebene; es ist also $u=0$ für $|y|>R$ und $u=\sqrt{R^2-y^2}$ für $-R\leq y\leq +R$. Für die Auftriebsverteilung $A'$ über die Breite ergibt sich aus (20a)

$$A'(y) = \frac{dA}{dy} = -\,\varrho\,V\int v_z\,dz$$

und mithin wird:

$$\left.\begin{array}{lll} A' = 0 & \text{für } |y| > B & \\ A' = \varrho\,V\Gamma & \text{» } R\leq |y| \leq B & \text{(an der Tragfläche)} \\ A' = \varrho\,V\Gamma\left[1-\dfrac{2}{\pi}\,\operatorname{arctg}\dfrac{2\,B\sqrt{R^2-y^2}}{B^2-R^2}\right] & \text{» } -R\leq y\leq +R & \text{(am Rumpf)} \end{array}\right\} \quad (22).$$

Der gesamte Auftrieb ergibt sich nun durch Integration über die Breite. Wir erhalten also den Auftriebsanteil der Tragfläche:

$$A_1 = 2\,\varrho\,V\Gamma\,(B-R)$$

und den Auftriebsanteil des Rumpfes:

$$A_2 = 2\,\varrho\,V\Gamma\left[R-\frac{2\,R}{\pi}\int\limits_0^{\pi/2}\sin\vartheta\,\operatorname{arctg}\frac{2\,B\,R\sin\vartheta}{B^2-R^2}\,d\,\vartheta\right].$$

Hierin ist $y=R\cos\vartheta$ gesetzt. Durch partielle Integration ergibt sich:

$$\frac{2\,R}{\pi}\int\limits_0^{\pi/2}\sin\vartheta\,\operatorname{arctg}\frac{2\,B\,R\sin\vartheta}{B^2-R^2}\,d\,\vartheta = \frac{4\,B\,R^2}{\pi\,(B^2-R^2)}\int\limits_0^{\pi/2}\frac{\cos^2\vartheta\,d\,\vartheta}{1+\dfrac{4\,B^2\,R^2}{(B^2-R^2)^2}\sin^2\vartheta} = \frac{R^2}{B}\,.$$

Damit wird der Auftriebsanteil des Rumpfes:

$$A_2 = 2\,\varrho\,V\Gamma\left(R-\frac{R^2}{B}\right).$$

Der Auftrieb am gesamten Flugzeug ergibt sich also zu:

$$A = 2\,\varrho\,V\Gamma\left(B-\frac{R^2}{B}\right) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (23).$$

In Abb. 2 ist $\dfrac{A}{\varrho\,V\Gamma R}$ in Abhängigkeit vom Breitenverhältnis $b=\dfrac{B}{R}$ aufgetragen. Abb. 3 zeigt die Auftriebsverteilung über die Rumpfbreite für $b=10$ und $b=6$.

Nun ermitteln wir noch den Auftrieb für den Fall, daß die Tragfläche in der Höhe $z=e$ am Rumpf befestigt ist, also für Hoch- oder Tiefdecker. Dann sind außer dem gebundenen Wirbel auch die freien Wirbel, die von den Enden der Tragfläche ausgehen, in der Ebene $z=e$ anzunehmen. In der Ebene $x=-\infty$ ist die Potentialfunktion der freien Wirbel:

$$\varphi_1 = \frac{\Gamma}{2\,\pi}\left[\operatorname{arctg}\frac{z-e}{y-B}-\operatorname{arctg}\frac{z-e}{y+B}\right] = \frac{\Gamma}{2\,\pi}\operatorname{arctg}\frac{2\,B\,(z-e)}{y^2+z^2-2\,e\,z-B^2+e^2} \quad (24\,\text{a}).$$

Durch Spiegelung der freien Wirbel am Rumpfschnitt erhalten wir zwei gegenläufige Wirbel bei

$$y = \pm\,B\,\frac{R^2}{B^2+e^2}\,, \qquad z = e\,\frac{R^2}{B^2+e^2}\,.$$

Diese erfüllen mit den freien Wirbeln die Bedingung glatten Umströmens des Rumpfes. Die Potentialfunktion der gespiegelten Wirbel lautet:

$$\varphi_2 = -\frac{\Gamma}{2\,\pi}\left[\operatorname{arctg}\frac{z-e\,\dfrac{R^2}{c^2}}{y-B\,\dfrac{R^2}{c^2}}-\operatorname{arctg}\frac{z-e\,\dfrac{R^2}{c^2}}{y-B\,\dfrac{R^2}{c^2}}\right] = -\frac{\Gamma}{2\,\pi}\operatorname{arctg}\frac{2\,B\,\dfrac{R^2}{c^2}\left(z-e\,\dfrac{R^2}{c^2}\right)}{y^2+z^2-2\,e\,\dfrac{R^2}{c^2}\,z-(B^2-e^2)\,\dfrac{R^4}{c^4}} \quad (24\,\text{b}).$$

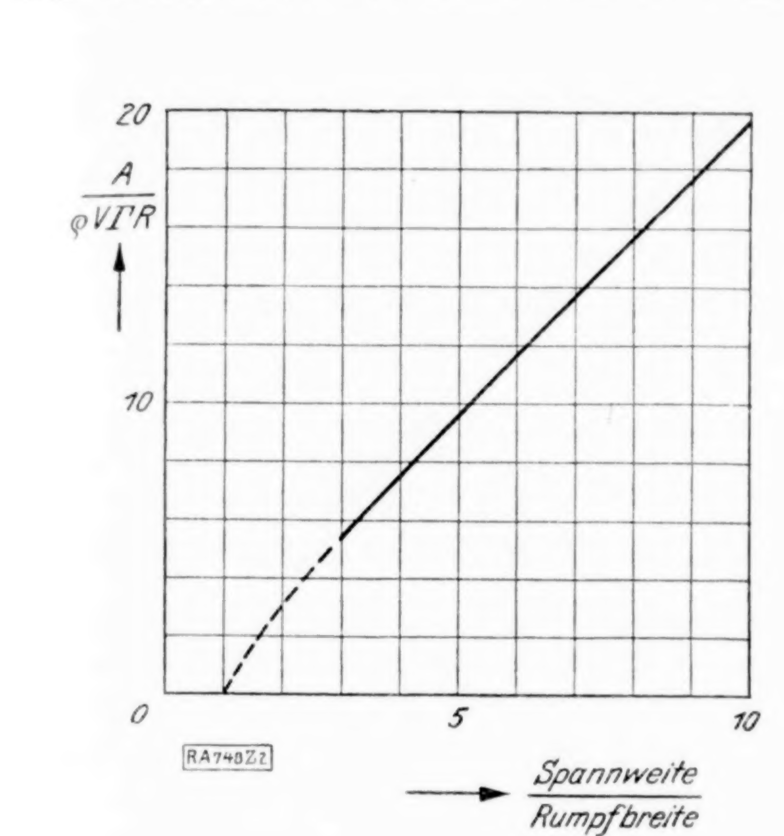
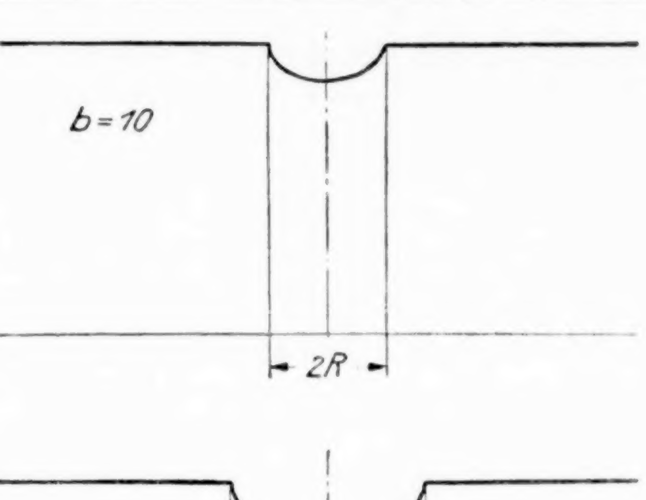


Abb. 2.



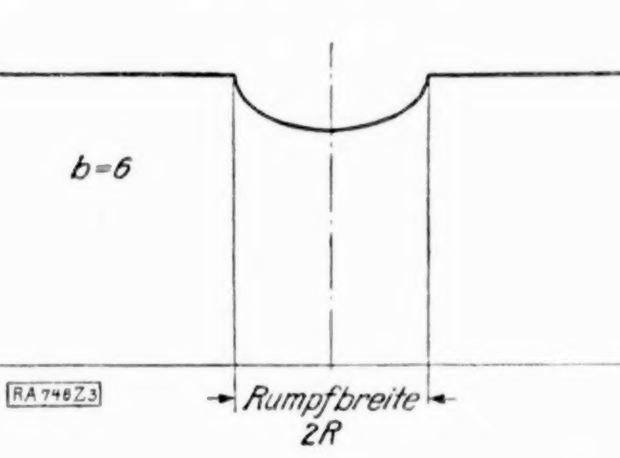


Abb. 3.

Hierin ist $c^2 = B^2 + e^2$ das Quadrat der Entfernung der freien Wirbel von der Rumpfachse. Das vollständige Potential ist wieder $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$.

Die Berechnung wird in entsprechender Weise wie vorhin durchgeführt. Es ist jedoch zu berücksichtigen, daß die Auswertung des Impuls-Integrals sich nicht auf die obere Halbebene beschränken läßt. Zunächst erhalten wir die Auftriebsverteilung über die Breite:

$$\left.\begin{aligned} A' &= 0 && \text{für } |y| > B \\ A' &= \varrho\, V\, \Gamma && \text{für } R \leq |y| \leq B \\ A' &= \varrho\, V\, \Gamma \left[1 - \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{4\, B\, (c^2 - R^2) \sqrt{R^2 - y^2}}{c^4 + R^4 - 2\, R^2\, (B^2 - e^2) - 4\, c^2\, (R^2 - y^2)}\right] && \text{für } -R \leq y \leq R \end{aligned}\right\} \quad (25).$$

Hiermit ergibt sich wieder der Auftriebsanteil der Bereiche $R \leq |y| \leq B$ zu:

$$A_1 = 2\varrho\, V\, \Gamma\, (B - R)$$

sowie der Anteil des Bereiches $-R \leq y \leq R$ zu:

$$A_2 = 2\, \varrho\, V\, \Gamma \left[R - \frac{R}{\pi} \int_0^{\pi/2} \sin \vartheta \operatorname{arctg} \frac{4\, B\, R\, (c^2 - R^2) \sin \vartheta}{c^4 + R^4 - 2\, R^2\, (B^2 - e^2) - 4\, c^2\, R^4 \sin^2 \vartheta}\, d\,\vartheta\right].$$

Durch partielle Integration und Zerlegung in Partialbrüche wird:

$$\int_0^{\pi/2} \sin \vartheta \operatorname{arctg} \frac{\alpha \sin \vartheta}{\beta - \gamma \sin^2 \vartheta}\, d\,\vartheta = \alpha\, \beta \int_0^{\pi/2} \frac{\cos^2 \vartheta\, d\,\vartheta}{\beta^2 - (2\, \beta\, \gamma - \alpha^2) \sin^2 \vartheta + \gamma^2 \sin^4 \vartheta}$$

$$= \frac{\pi}{4} \frac{\beta}{\sqrt{\alpha^2 - 4\, \beta\, \gamma}} \left[\frac{1}{\sqrt{\lambda_1}} - \frac{1}{\sqrt{\lambda_2}}\right]$$

mit

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2\, \gamma^2} \left(2\, \beta\, \gamma - \alpha^2 \pm \alpha \sqrt{\alpha^2 - 4\, \beta\, \gamma}\right).$$

Setzen wir diese Ausdrücke oben ein, so ergibt sich der Rumpfauftrieb:

$$A_2 = 2\, \varrho\, V\, \Gamma \left(R - \frac{R^2\, B}{B^2 + e^2}\right).$$

Der Auftrieb am gesamten Flugzeug ist also:

$$A = \varrho\, V\, \Gamma \cdot 2\, B \left(1 - \frac{R^2}{B^2 + e^2}\right) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (26).$$

Bei den praktisch vorkommenden Abmessungen eines Flugzeuges ist der Einfluß der Höhenlage der Tragfläche auf den Auftrieb gering. Ersetzt man den Rumpf durch Trag-

flächenstücke, die den Auftrieb des Rumpfes hervorbringen, so ergibt sich die wirksame Breite für den gesamten Auftrieb dadurch, daß die Spannweite um die Breite zwischen den Spiegelpunkten der am Rumpf gespiegelten Tragflächenenden vermindert wird. Beachtenswert ist noch, daß sich derselbe Auftrieb ergibt, wenn die Tragfläche um dasselbe Maß $e$ oberhalb bzw. unterhalb der Mittellage am Rumpf angebracht ist.

**5. Anteil des Rumpfes am Widerstand und Einfluß des Rumpfes auf den Anstellwinkel der Tragfläche bei konstanter Zirkulationsverteilung.** In dem Falle einer konstanten Zirkulationsverteilung über die Tragfläche erhält die Frage nach dem gesamten Widerstand keine befriedigende Antwort. Nach dem Energiesatz müßte nämlich der Widerstand unendlich groß werden, weil am konzentrierten Wirbelfaden die Geschwindigkeit unendlich groß wird. Wir können jedoch wohl den Einfluß des Rumpfes auf Anstellwinkel und Widerstand der Tragfläche feststellen. Zu diesem Zwecke betrachten wir die Strömungsvorgänge in der Nähe der Tragfläche.

Wir behandeln die gestellte Aufgabe für den Fall, daß die Tragfläche in der Ebene $z = e$ liegt. Alsdann haben wir in der Ebene $z = e$ den gebundenen Wirbelfaden und die von den Tragflächen abgehenden freien Wirbel, die zusammen den Hufeisenwirbel der Tragfläche bilden. Die Spiegelung der freien Wirbel liefert uns alsdann einen gegenläufigen Hufeisenwirbel in der Ebene $z = e \frac{R^2}{B^2 + e^2}$, den Hufeisenwirbel des Rumpfes. Den Geschwindigkeitsfeldern $\mathfrak{w}_1$ und $\mathfrak{w}_2$ der beiden Hufeisenwirbel muß nun in der Nähe der Tragfläche noch ein Geschwindigkeitsfeld $\mathfrak{u}$ überlagert werden, damit die Bedingung eines freien Umströmens des Rumpfes erfüllt wird. Der Widerstand und die Aenderung des Anstellwinkels ist aber durch die $z$-Komponente der Geschwindigkeit an der Tragfläche bedingt. Nun ergibt sich $u_z$ in der Form des Ausdruckes (10) und in derselben Weise wie dieser Ausdruck verschwindet hier $u_z$ an der Tragfläche. Die vom Rumpf herrührende $z$ Komponente der Geschwindigkeit an der Tragfläche ist also die Geschwindigkeit, die von den beiden parallelen Aesten des Hufeisenwirbels des Rumpfes herrührt. Diese Geschwindigkeit können wir jedoch leicht durch Fortsetzung dieser parallelen Wirbeläste bis $x = +\infty$ ermitteln. Durch diese Fortsetzung erhalten wir nämlich zwei vollständige parallele Wirbelfäden in den Geraden $y = \pm B \frac{R^2}{B^2 + e^2}$, $z = e \frac{R^2}{B^2 + e^2}$ und die Abwärtsgeschwindigkeit an der Tragfläche infolge dieser vollständigen Wirbelfäden hat nach dem Biot-Savartschen Gesetz den doppelten Betrag von der Abwärtsgeschwindigkeit der halblangen Wirbeläste. Es ergibt sich demnach aus (24 b) an der Tragfläche, d. h. für $z = e$:

$$w_{2z} = -\frac{\Gamma}{4\pi}\frac{c^2}{R^2}\left[\frac{\frac{c^2}{R^2}y - B}{\left(\frac{c^2}{R^2}y - B\right)^2 + \left(\frac{c^2}{R^2} - 1\right)^2 e^2} - \frac{\frac{c^2}{R^2}y + B}{\left(\frac{c^2}{R^2}y + B\right)^2 + \left(\frac{c^2}{R^2} - 1\right)^2 e^2}\right] \quad . \quad (27\,\mathrm{a})$$

Der effektive Anstellwinkel der Tragfläche wird also verringert infolge des Rumpfes um:

$$\varepsilon_0 = -\frac{1}{V} w_{2z} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (27\,\mathrm{b}).$$

Nun ist an einem Element der Tragfläche $\frac{dW}{dA} = \varepsilon$, und es ergibt sich hiermit die Verteilung des Widerstandsanteiles vom Rumpf über die Breite der Tragfläche zu:

$$W_0' = \frac{d W_0}{d y} = \varrho V \Gamma \varepsilon_0.$$

Durch Integration über die Tragflächenbreite ergibt sich sodann der vom Rumpf herrührende Widerstand an der Tragfläche für den Fall $|e| < R$ zu:

$$W_0 = \frac{\varrho \Gamma^2}{4\pi}\Bigg[\ln \frac{(B^2 + e^2)(B^2 + e^2 - R^2)^2}{[(B^2 + e^2)\sqrt{R^2 - e^2} - R^2 B]^2 + e^2 [B^2 + e^2 - R^2]^2}$$
$$- \ln \frac{B^2 (B^2 + e^2 + R^2)^2 + e^2 (B^2 + e^2 - R^2)^2}{[(B^2 + e^2)\sqrt{R^2 - e^2} + R^2 B]^2 + e^2 [B^2 + e^2 - R^2]^2}\Bigg] \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (28).$$

Ist die Tragfläche derart angeordnet, daß $e = 0$ wird, so vereinfacht sich (28) zu folgendem Ausdruck:

$$W_0 = \frac{\varrho \Gamma^2}{4\pi} \ln \frac{(B + R)^4}{(B^2 + R^2)^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (29).$$

Wenn $|e| \geqq R$ ist, so ist $\sqrt{R^2 - e^2} = 0$ zu setzen, weil dann die Tragfläche in der Mitte nicht unterbrochen ist. Wir erhalten dann:

$$W_0 = \frac{\varrho\, \Gamma^2}{4\,\pi} \ln \frac{(B^2 + e^2)\,(B^2 + e^2 - R^2)^2}{B^2\,(B^2 + e^2 + R^2)^2 + e^2\,(B^2 + e^2 - R^2)^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (30).$$

Es zeigt sich, daß auch der Widerstand an der Tragfläche infolge des Rumpfes bei Hebung oder Senkung der Tragfläche um das gleiche Maß $e$ derselbe ist. In Abb. 4 ist $\frac{W_0}{\varrho\,\Gamma^2}$ in Abhängigkeit von dem Breitenverhältnis $b = \frac{B}{R}$ für $e = 0$ dargestellt. In Abb. 5 ist $b$ festgehalten und $\frac{W_0}{\varrho\,\Gamma^2}$ in Abhängigkeit von $\frac{e}{R}$ aufgetragen. Wenn die Tragfläche oberhalb bzw. unterhalb des Rumpfes angebracht ist, so bewirkt der Rumpf eine Verminderung des Tragflächenwiderstands; in diesem Fall wird nämlich eine Aufwärtsgeschwindigkeit in der Mitte der Tragfläche durch die Wirbelfäden im Rumpfinnern und mithin eine Vergrößerung des Anstellwinkels in der Mitte der Tragfläche bewirkt.

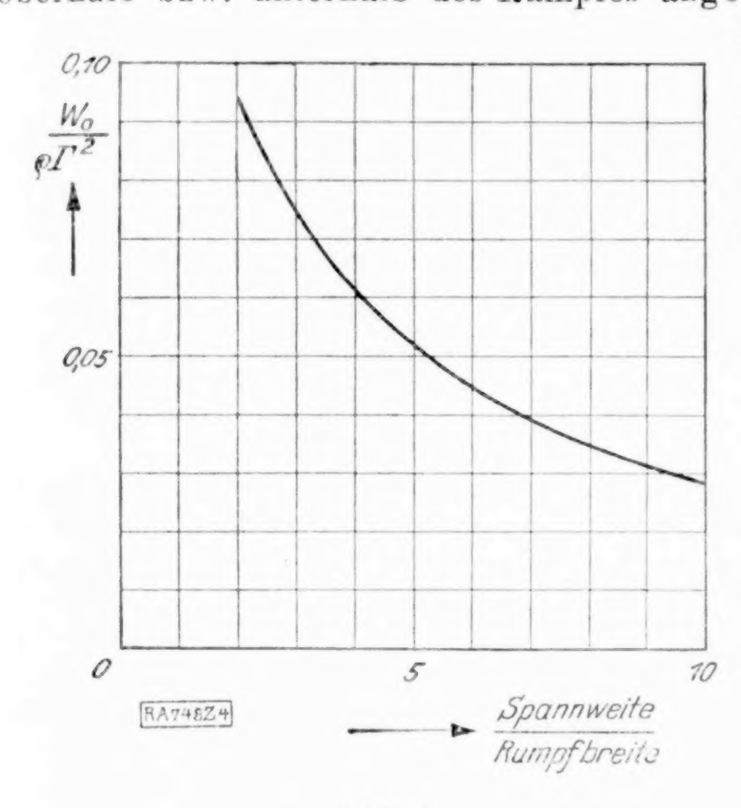



Abb. 4.

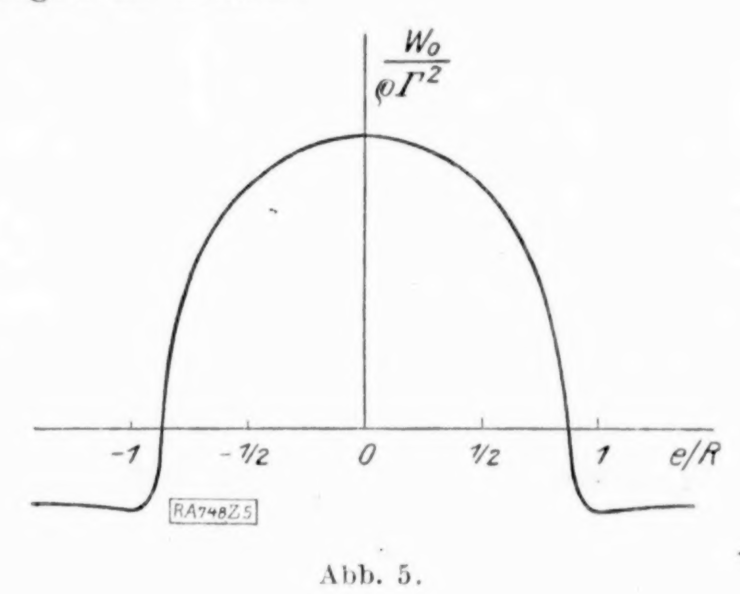



Abb. 5.

**6. Kleinster Widerstand für gegebenen Auftrieb.** Nun stellen wir für den Fall, daß Tragflächenachse und Rumpfachse sich schneiden, die Frage nach der Zirkulationsverteilung über die Tragfläche, die bei gegebenem Auftrieb den geringsten Widerstand ergibt. Die freien Wirbel, welche von der Hinterkante der Tragfläche abgehen, sind hierbei stetig über die Tragflächenbreite verteilt und ergeben in ihrer Gesamtheit ein Wirbelband, das nach Prandtl eben angenommen wird, in unserem Falle also in der $x$-$y$-Ebene liegt. Zur Vereinfachung der Rechnung setzen wir den Radius des Rumpfes gleich 1, so daß die Spannweite des Flugzeuges gleich 2 b wird. Wir benutzen die Beziehung (20 a) und (20 b) für Auftrieb und Widerstand, die sich aus dem Impuls- und Energiesatz ergaben. Die Integrale in (20 a) und (20 b) sind zu erstrecken über die Fläche $x = -\infty$ mit Ausnahme des Rumpfquerschnittes und des Wirbelbandschnittes. Wir können nun mit Hilfe des Stokesschen Integralsatzes die Flächenintegrale in Randintegrale umwandeln, da die Flüssigkeitsbewegung im Integrationsbereich wirbelfrei ist und im Unendlichen (d. h. bei $y = \infty$ oder $z = \infty$) die Flüssigkeit ruht. Es wird demnach

$$A = -\varrho\, V \int_K \varphi \cdot \cos(\nu, z)\, d\, s = -\varrho\, V \int_K \varphi\, \frac{d\,y}{d\,s}\, d\,s \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (31\,a)$$

$$W = -\frac{\varrho}{2} \int_K \varphi\, \frac{\partial \varphi}{\partial \nu}\, d\,s \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (31\,b).$$

Die Integrale sind längs der Begrenzung $K$ des Wirbelbandschnittes und des Rumpfquerschnittes zu erstrecken, und mit $\nu$ ist die äußere Normale der Integrationsfläche bezeichnet. Am Wirbelband ist längs einer Wirbellinie der Potentialsprung $\varphi_o - \varphi_u = \Gamma$ und $n$ die nach oben weisende Normale. Sodann berücksichtigen wir, daß am Rumpf $\frac{\partial \varphi}{\partial \nu} = 0$ ist und ferner, daß beim Durchgang durch das Wirbelband $\frac{\partial \varphi}{\partial n}$ stetig bleibt und

daß wegen der Symmetrie der Strömung $\Gamma(y) = \Gamma(-y)$ ist. Es ergibt sich demnach der Widerstand:

$$W = -\varrho \int_1^b \Gamma \frac{\partial \varphi}{\partial n} d y \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (32\text{a})$$

und der Auftrieb:

$$A = \varrho V \int_{-b}^{b} (\varphi_0 - \varphi_u) d y \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (32\text{b}).$$

Die Bedingung, daß am Rumpf $\frac{\partial \varphi}{\partial \nu}$ verschwinden soll, läßt sich wieder durch Spiegelung der freien Wirbel am Rumpf erreichen. Mit $\Gamma'(y) = \frac{d \Gamma}{d y}$ wird nun $\Gamma'(y) = -\Gamma'\left(\frac{1}{y}\right)$ und $\Gamma(y) = \Gamma\left(\frac{1}{y}\right)$. Aus (23) folgt, daß bei Zylinderrumpf vom Radius $R = 1$ der Auftriebsanteil eines Hufeisenwirbels von der Breite $2\eta$ und der Zirkulation $d\Gamma$ sich ergibt zu $d A = 2 \varrho V d \Gamma (\eta - 1/\eta)$. Für eine stetige Zirkulationsverteilung $\Gamma(y)$ über die Tragfläche wird entsprechend der Auftrieb

$$A = 2 \varrho V \int_{1/b}^{b} \Gamma(y) d y \qquad \text{mit} \qquad \Gamma(y) = \Gamma(1/y)$$

oder nach Aenderung der Integrationsrichtung

$$A = -2 \varrho V \int_{1/b}^{b} y \, \Gamma'(y) d y \qquad \text{mit} \qquad \Gamma'(y) = -\Gamma'(1/y).$$

Es ist also

$$A = -2 \varrho V \int_1^b \Gamma'(y)(y - 1/y) d y.$$

Durch partielle Integration ergibt sich:

$$A = -2 \varrho V [\Gamma(y)(y - 1/y)]_1^b + 2 \varrho V \int_1^b \Gamma(y)(1 + 1/y^2) d y.$$

Berücksichtigen wir noch, daß am Ende des Wirbelbandes (d. h. bei $y = \pm b$) $\Gamma = 0$ wird, so erhalten wir:

$$A = 2 \varrho V \int_1^b \Gamma(y)(1 + 1/y^2) d y \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (32\text{c}).$$

Bei einer Aenderung des Potentials $\varphi$ um $\delta \varphi$ ändert sich der Widerstand um

$$\delta W = -\varrho \int \int \operatorname{grad} \varphi \operatorname{grad} \delta \varphi \, d y \, d z = -\varrho \int_K \delta \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} d s$$

und der Auftrieb um

$$\delta A = -\varrho V \int_K \delta \varphi \cos(\nu, z) d s.$$

Eine Aenderung der Zirkulation an der Tragfläche um $\delta \Gamma$ ergibt also die Aenderung des Widerstandes:

$$\delta W = -2 \varrho \int_1^b \delta \Gamma \frac{\partial \varphi}{\partial n} d y$$

und die Aenderung des Auftriebs:

$$\delta A = 2 \varrho V \int_1^b \delta \Gamma (1 + 1/y^2) d y.$$

Soll nun $W$ bei gegebenem $A$ den kleinsten Wert erhalten, so muß für beliebiges $\delta \Gamma$ die folgende Bedingung erfüllt sein:

$$\delta W - \lambda \delta A = 0.$$

Es muß also:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} = -\lambda V \left(1 + \frac{1}{y^2}\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (33)$$

sein. Wir erhalten also bei gegebenem Auftrieb den kleinsten Widerstand, wenn wir dem Wirbelband eine Abwärtsgeschwindigkeit nach der Bedingung (33) erteilen. Wir gehen nun in folgender Weise vor: Wir bestimmen eine Bewegung die das Wirbelband und den Rumpf umströmt und im Unendlichen eine konstante Geschwindigkeit $c = \lambda V$ nach oben hat (Abb. 6, oberes Strömungsbild). Sodann überlagern wir eine Strömung um den Rumpf, die im Unendlichen die Geschwindigkeit $c$ nach unten hat (Abb. 6, unteres Strömungsbild). Die Gesamtströmung erfüllt dann am Wirbelband gerade die Bedingung (33). Diese Bedingung entspricht der Bedingung konstanter Abwärtsbewegung des Wirbelbandes, die von Munk für eine Tragfläche ohne Rumpf hergeleitet wurde.

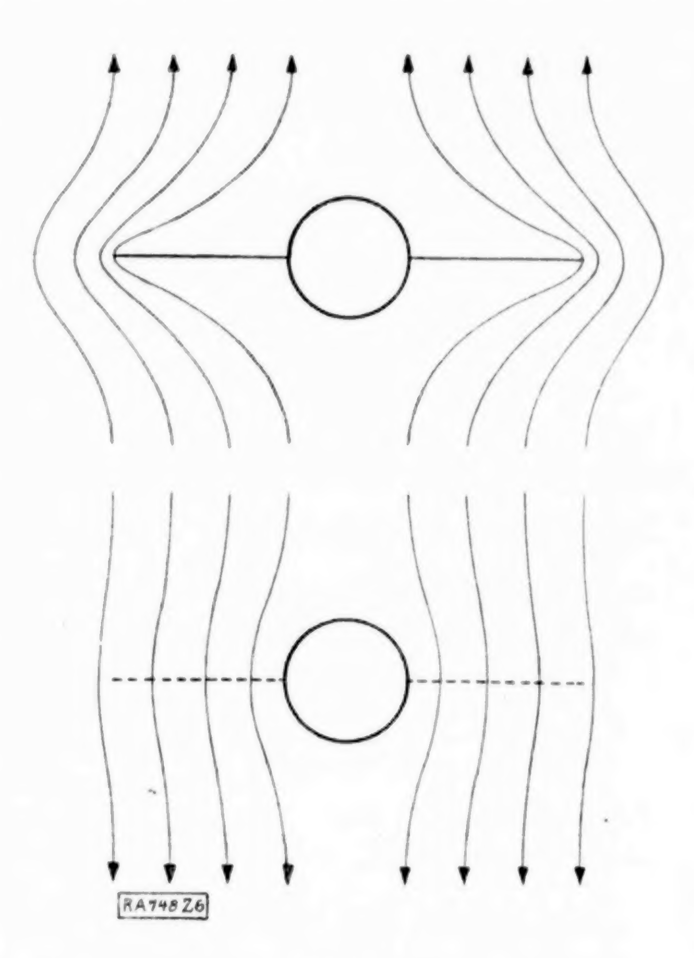


Abb. 6.

In der weiteren Berechnung betrachten wir die Koordinaten $y$ und $z$ in der Ebene $x = -\infty$ als Koordinaten einer komplexen Zahlenebene, indem wir $\zeta = y + i z$ setzen. Die Potentialfunktion, welche die Strömung um Wirbelband und Rumpf ergibt, erhalten wir sodann mit Hilfe konformer Abbildung. Die Gleichung der Randkurve (Abb. 7) lautet:

$$\zeta_k = a \cos \vartheta + \sqrt{a^2 \cos^2 \vartheta - 1} \quad . \quad (34).$$

Hierin ist für $0 < \vartheta < \pi$ die Wurzel positiv, für $\pi < \vartheta < 2\pi$ die Wurzel negativ zu nehmen. Ferner ist

$$a = \frac{b^2 + 1}{2b} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (35)$$

gesetzt. Durch die Funktion

$$\zeta = \frac{1}{2}\left(Z + \frac{a^2}{Z}\right) + \sqrt{\frac{1}{4}\left(Z + \frac{a^2}{Z}\right)^2 - 1} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (36)$$

wird nun die Außenfläche der Randkurve $K$ in der $\zeta$-Ebene auf die Außenfläche eines Kreises vom Radius $a$ in der $Z$-Ebene konform abgebildet. Die Strömung um die Kreiskontur in der $Z$-Ebene, bei der im Unendlichen die Aufwärtsgeschwindigkeit $c$ vorhanden ist, ergibt sich aus dem komplexen Potential

$$X_1 = i c \left[ - Z + \frac{a^2}{Z} \right] \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (37\,a).$$

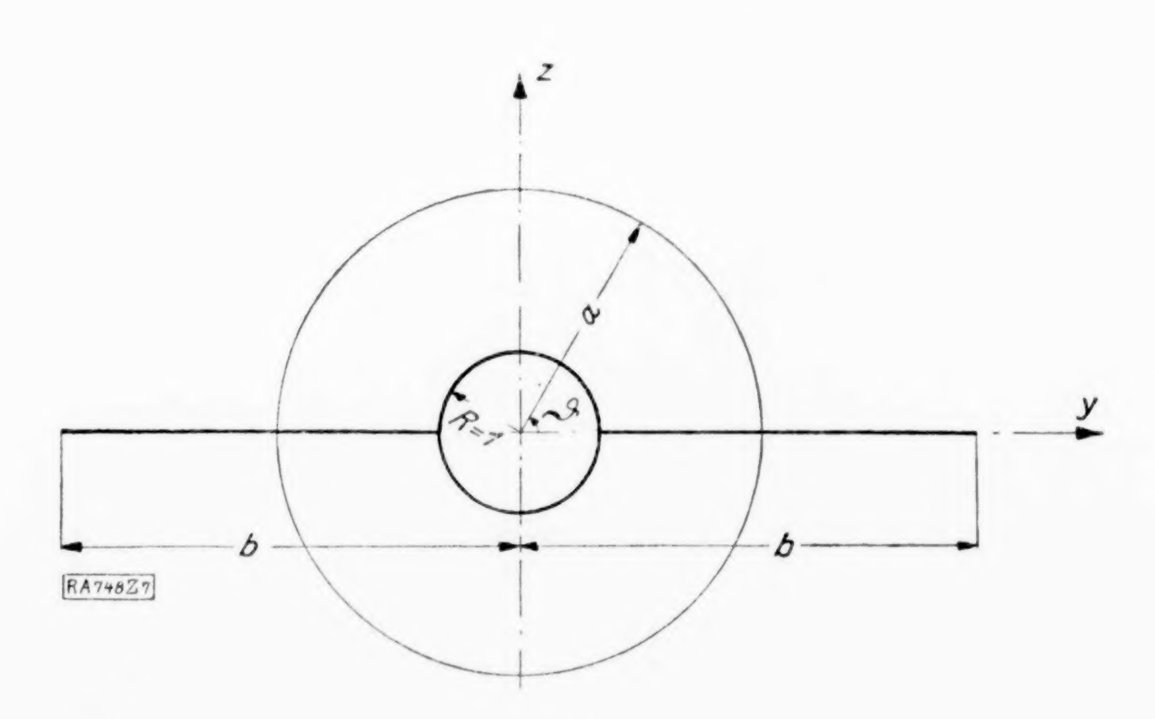


Abb 7.

Mithin ist die Strömung, welche Wirbelband und Rumpfquerschnitt in der $\zeta$-Ebene umströmt und im Unendlichen die Aufwärtsgeschwindigkeit $c$ besitzt, durch das komplexe Potential

$$\chi_1 = -2\,i\,c\sqrt{\frac{(\zeta^2+1)^2}{4\,\zeta^2} - a^2} \quad \ldots \ldots \quad (37\,\text{b})$$

bestimmt. Wir überlagern nun eine Strömung um den Rumpfquerschnitt, die im Unendlichen die Abwärtsgeschwindigkeit $c$ hat. Das komplexe Potential dieser Strömung lautet in der $\zeta$-Ebene:

$$\chi_2 = i\,c\,(\zeta - 1/\zeta) \quad \ldots \ldots \quad (38\,\text{a})$$

und mithin in der $Z$-Ebene:

$$X_2 = 2\,i\,c\sqrt{\frac{1}{4}\left(Z + \frac{a^2}{Z}\right)^2 - 1} \quad \ldots \ldots \quad (38\,\text{b}).$$

Es ergibt sich demnach das komplexe Potential der Gesamtströmung:

$$X = X_1 + X_2 \quad \ldots \ldots \quad (39\,\text{a})$$

bzw.

$$\chi = \chi_1 + \chi_2 \quad \ldots \ldots \quad (39\,\text{b}).$$

Die durch (39) gefundene Strömung erfüllt am Wirbelband die Bedingung (33) und ebenfalls am Rumpfquerschnitt die Bedingung $\frac{\partial \varphi}{\partial \nu} = 0$. Die Zirkulationsverteilung $\Gamma(y)$ über die Tragfläche ergibt sich durch die Differenz der Potentialwerte an der oberen und unteren Seite des Wirbelbandes aus (39b), wenn man berücksichtigt, daß am Wirbelband $\zeta + 1/\zeta$ reell und die Wurzel imaginär wird. Es ist also

$$\Gamma(y) = 4\,c\sqrt{a^2 - \frac{(y^2+1)^2}{4\,y^2}}\,.$$

Bezeichnet $\Gamma_1$ den Zirkulationswert an der Anschlußstelle von Tragfläche und Rumpf, also bei $y = \pm 1$, so ergibt sich die Auftriebsverteilung $A_T'$ über die Tragfläche aus:

$$\frac{A_T'}{\varrho\,V} = \Gamma(y) = \Gamma_1\,\frac{B^2+R^2}{B^2-R^2}\sqrt{1 - \frac{B^2}{(B^2+R^2)^2}\,\frac{(Y^2+R^2)^2}{Y^2}} \quad \ldots \quad (40)$$

Hierin sind die Absolutwerte eingeführt, und zwar für die Spannweite $2\,B$, für den Rumpfradius $R$ und für die Abszisse $Y$. Die Auftriebsverteilung $A_R'$ über die Rumpfbreite ergibt sich aus dem Potentialsprung am Rande des Rumpfschnittes. Berücksichtigen wir, daß am Rumpfumfang $z^2 = 1 - y^2$ ist, so ergibt sich nach Einführung der Absolutwerte:

$$\frac{A_R'}{\varrho\,V} = \Gamma_1\,\frac{2\,B}{B^2-R^2}\left[\sqrt{\frac{(B^2+R^2)^2}{4\,B^2} - Y^2} - \sqrt{R^2 - Y^2}\right] \quad \ldots \quad (41).$$

Die Auftriebsverteilung über die Breite ist also durch (40) und (41) ermittelt.

Wir berechnen noch die Werte für Gesamtauftrieb und Widerstand. Der von dem komplexen Potential $\chi_1$ herrührende Anteil des Auftriebs ergibt sich nach (31a) zu:

$$A_1 = \varrho\,V\,2\,\pi\,a^2\,c.$$

Der von $X_2$ herrührende Anteil ist:

$$A_2 = -\varrho\,V\,\pi\,c.$$

Wir erhalten mithin den Auftrieb:

$$A = \varrho\,V\,\pi\,c\,(2\,a^2 - 1) = \varrho\,V\,\pi\,c\,\frac{b^4+1}{2\,b^2} \quad \ldots \ldots \quad (42\,\text{a}).$$

Der Widerstand ergibt sich aus (32a) zu:

$$W = 4\,c^2\,\varrho\int_1^b\left(1 + \frac{1}{y^2}\right)\sqrt{a^2 - \frac{(1+y^2)^2}{4\,y^2}}\,d\,y.$$

Also mit $y^2 = \eta$:

$$W = c^2\,\varrho\int_1^{b^2}\left(\frac{1}{\eta} + \frac{1}{\eta^2}\right)\sqrt{-1 + 2\,(2\,a^2 - 1)\,\eta - \eta^2}\,d\,\eta.$$

Durch partielle Integration ergibt sich mit Benutzung von (35):

$$W = \varrho\,c^2\,2\,(a^2 - 1)\left[\int_1^{b^2}\frac{d\,\eta}{\eta\sqrt{-1 + 2\,(2\,a^2-1)\,\eta - \eta^2}} + \int_1^{b^2}\frac{d\,\eta}{\sqrt{-1 + 2\,(2\,a^2-1)\,\eta - \eta^2}}\right]$$

$$= \varrho\,c^2\,\frac{(b^2-1)^2}{2\,b^2}\left[\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}\frac{b^2-1}{2\,b} + \frac{\pi}{2} - \arcsin\frac{b^2-1}{b^2+1}\right].$$

Der **Widerstand ist also:**

$$W = \varrho\, c^2 \frac{(b^2-1)^2}{2\, b^2}\left[\pi - 2 \arcsin \frac{b^2-1}{b^2+1}\right] \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (42\text{b}).$$

**Eliminieren wir aus (42a) und (42b) noch** $c$, **so ergibt sich**

$$W = \frac{A^2}{\pi\, \varrho\, V^2}\, \frac{2\, b\, (b^2-1)^2}{(b^4+1)^2}\left[\frac{1}{\pi} - \frac{2}{\pi^2} \arcsin \frac{b^2-1}{b^2+1}\right] \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (43).$$

**Drücken wir hierin** $A$ **und** $W$ **in üblicher Weise durch die Beiwerte** $C_a$ **und** $C_W$ **aus, so ergibt sich mit** $\frac{F}{4\, B^2}$ **als Seitenverhältnis der Tragfläche:**

$$C_W = \frac{C_a^2}{\pi}\left(\frac{F}{4\, B^2}\right)\frac{4\, b^2\, (b^2-1)^2}{(b^4+1)^2}\left[1 - \frac{2}{\pi} \arcsin \frac{b^2-1}{b^2+1}\right] \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (44).$$

**Wir stellen noch den Auftriebsanteil des Rumpfes am Gesamtauftrieb fest, indem wir (41) über die Rumpfbreite integrieren. Es ist mit Benutzung von (35):**

$$\frac{A_R}{\varrho\, V} = 8\, c\left[\int_0^1 \sqrt{a^2-y^2}\, dy - \int_0^1 \sqrt{1-y^2}\, dy\right] = 4\, c\left[\frac{b^2-1}{2\, b} - \frac{\pi}{2} + \frac{(b^2+1)^2}{4\, b^2} \arcsin \frac{2\, b}{b^2+1}\right].$$

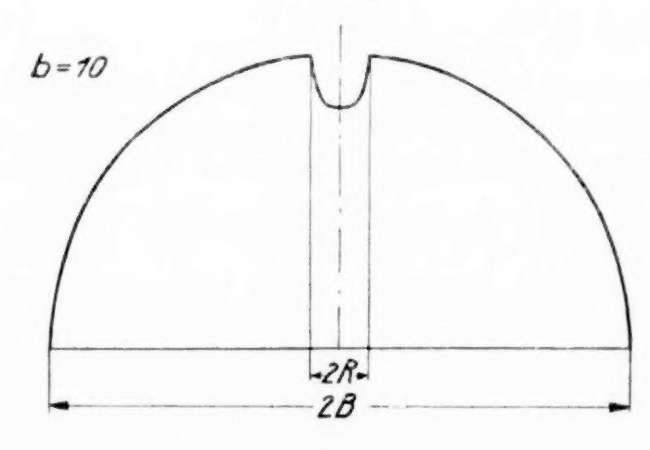
**Das Verhältnis vom Rumpfauftrieb zum Gesamtauftrieb ergibt sich also zu:**

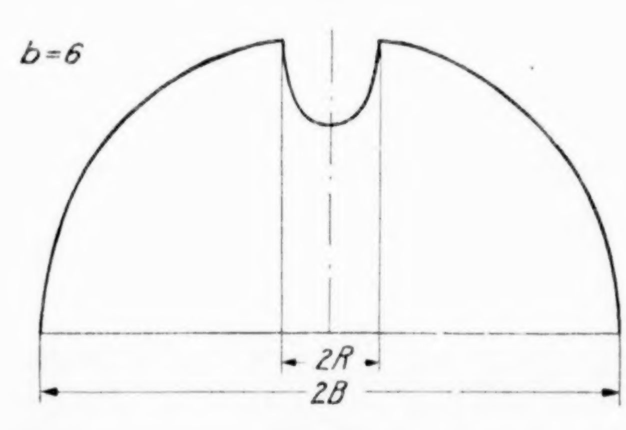
$$\frac{A_R}{A} = \frac{4}{\pi}\left[\frac{b^2-1}{b^4+1}\, b + \frac{(b^2+1)^2}{2\, (b^4+1)} \arcsin \frac{2\, b}{b^2+1} - \frac{b^2}{b^4+1}\, \pi\right] \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (45).$$

**Folgende Zusammenstellung gibt einige Werte dieses Verhältnisses an:**

| $b =$ | 2 | 4 | 6 | 8 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|
| $\frac{A_R}{A} =$ | 0,378 | 0,399 | 0,317 | 0,258 | 0,216 |

**Durch (40) und (41) ist die Auftriebsverteilung bei kleinstem induzierten Widerstand gefunden, welche der elliptischen Verteilung über eine Tragfläche ohne Rumpf entspricht. Die Auftriebsverteilung nach (40) und (41) ist in Abb. 8 für verschiedene Breitenverhältnisse dargestellt. Abb. 9 gibt in einem Polardiagramm die Abhängig-**



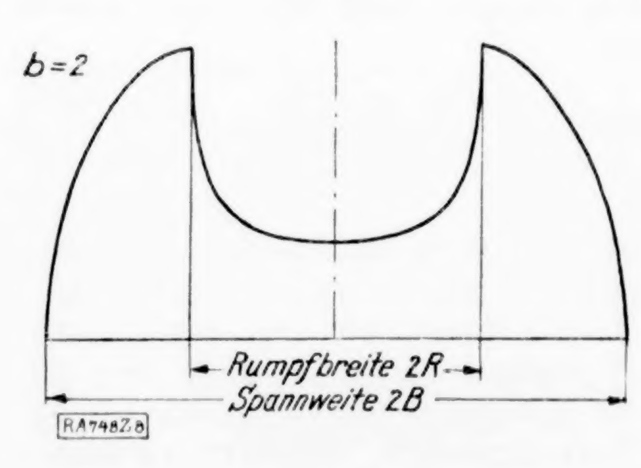




Abb. 8.

Abb. 9.

keit des Widerstandsbeiwertes vom Auftriebsbeiwert an; zum Vergleich ist das Diagramm für Tragfläche ohne Rumpf ebenfalls aufgetragen.

## 7. Auftriebsverteilung längs des Rumpfes bei unendlich breiter Tragfläche.

Nunmehr ermitteln wir noch die Auftriebsverteilung in der Längsrichtung des zylindrischen Rumpfes für den Fall, daß Rumpfachse und Profilmittellinie der Tragfläche sich schneiden. Der Radius des Rumpfes sei wieder gleich 1 gesetzt. Zunächst nehmen wir eine Tragfläche von unendlich großer Breite und gleichmäßiger Zirkulationsverteilung an, also dieselbe Anordnung, mit der wir uns im Abschnitt **3** beschäftigt haben.

Infolge des Wirbelfadens, durch den wir die Tragfläche ersetzen, entsteht normal zur Oberfläche des Rumpfes eine Geschwindigkeitskomponente $w_n$, die in (7a) ausgedrückt ist. Ferner entsteht infolge des Wirbelfadens ein Auftrieb, dessen Verteilung in der Längsrichtung des Rumpfes sich aus (15) ergibt. Oben sind wir nun derartig vorgegangen: Wir bestimmten ein Geschwindigkeitsfeld $\mathfrak{u}$ so, daß in unendlicher Entfernung vom Rumpfe $\mathfrak{u} = 0$ und an der Oberfläche des Rumpfes die Randbedingung

$$\mathfrak{u}_n + \mathfrak{w}_n = 0$$

erfüllt wurde. Die Potentialfunktion $\varphi_1$ für das Geschwindigkeitsfeld $\mathfrak{u}$ ergab sich in der Form

$$\varphi_1 = \frac{\Gamma}{2\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \sin k\vartheta \cdot g_k(r,x).$$

Es war uns nun mit Hilfe der exakten Potentialtheorie nicht gelungen, den vom Geschwindigkeitsfeld $\mathfrak{u}$ herrührenden Anteil an der Auftriebsverteilung numerisch zu ermitteln; es zeigte sich jedoch, daß nur das erste Glied in der Reihe für $\varphi_1$ einen Beitrag liefert.

Von dieser Tatsache machen wir nun Gebrauch und setzen

$$\varphi_1 = \frac{\Gamma}{2\pi} \sin\vartheta \cdot g(r,x) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (46).$$

Die von dieser Potentialfunktion herrührende Strömung läßt sich mit Hilfe von Singularitäten im Rumpfinnern erzeugen. Wir nehmen zu diesem Zwecke einen Doppelquellfaden längs der $x$-Achse an, und zwar in der Weise, daß in der Geraden $y = 0$, $z = +\varepsilon$ die Quellen von der Ergiebigkeit $\Gamma k(\xi)$ und in der Geraden $y = 0$, $z = -\varepsilon$ die Senken von derselben Ergiebigkeit verteilt sind. Hierbei ist $\varepsilon$ eine sehr kleine Länge. Ein Element $d\xi$ des Doppelquellfadens an der Stelle $\xi$ liefert nun im Punkte $x, y, z$ folgenden Beitrag zur Potentialfunktion:

$$d\varphi = \frac{\Gamma}{2\pi} k(\xi)\, d\xi \left\{ \frac{1}{[(x-\xi)^2 + y^2 + (z-\varepsilon)^2]^{1/2}} - \frac{1}{[(x-\xi)^2 + y^2 + (z+\varepsilon)^2]^{1/2}} \right\}.$$

Die Entwicklung in einer Taylorreihe nach $\varepsilon$ ergibt unter Vernachlässigung der höheren Glieder:

$$d\varphi = \frac{\Gamma}{2\pi} \frac{2\, z\, \varepsilon\, k(\xi)\, d\xi}{[(x-\xi)^2 + y^2 + z^2]^{3/2}}.$$

Setzen wir nun $\varepsilon\, k(\xi) = q(\xi)$, so ergibt sich nach Einführung der Zylinderkoordinaten:

$$\varphi_1 = \frac{\Gamma}{\pi} r \sin\vartheta \int_{-\infty}^{\infty} \frac{q(\xi)\, d\xi}{[(x-\xi)^2 + r^2]^{3/2}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (46\,\text{a}).$$

Nun soll an der Zylinderoberfläche die Randbedingung $\mathfrak{w}_n + \mathfrak{u}_n = 0$ erfüllt sein. Wir erfüllen dem Ansatz (46) entsprechend diese Randbedingung für das erste harmonische Glied von $\mathfrak{w}_n$ und erhalten dadurch als Bedingungsgleichung für $q(\xi)$ mit Berücksichtigung von (7) und (14) die Integralgleichung:

$$x\left[1 - \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}}\right] = \int_{-\infty}^{\infty} q(\xi)\, \frac{2 - (x-\xi)^2}{[(x-\xi)^2 + 1]^{5/2}}\, d\xi \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (47).$$

Ist nach dieser Gleichung die Funktion $q(\xi)$ ermittelt, so ist die Potentialfunktion $\varphi_1$ bekannt, und die vom Geschwindigkeitsfeld herrührende Auftriebsverteilung $P_2(x)$ ergibt sich sodann aus der Bernoullischen Beziehung in der Weise, wie oben angegeben wurde.

In unserer Untersuchung nehmen wir die Verteilung von $q(\xi)$ punktweise an. Wir teilen den Bereich $-\infty \leq \xi \leq \infty$ in gleich große Intervalle von der Länge 0,5 in der Weise ein, daß das Intervall $-{}^1/_4 \leq \xi \leq {}^1/_4$ die Ordnungszahl 0, das Intervall ${}^1/_4 \leq \xi \leq {}^3/_4$

die Ordnungszahl 1 erhält usw. Dadurch wird jedem Intervall eine Ordnungszahl zwischen $-\infty$ und $\infty$ zuerteilt. Sodann konzentrieren wir die in einem Intervall verteilten Doppelquellen in eine Doppelquelle, deren Lage wir in der Mitte des Intervalls annehmen. Auf diese Weise entsteht aus der Integralgleichung (47) ein System von zweifach unendlich vielen linearen Gleichungen mit ebenso vielen Unbekannten. Diese Gleichungen sind von einfachem Aufbau, weil der Kern der Integralgleichung (47) eine Funktion von $x - \xi$ ist. Die Koeffizienten der Unbekannten sind daher in sämtlichen Gleichungen unseres Gleichungssystems dieselben. Es sei nun das über das $i$-te Intervall erstreckte Integral $\int_i q(\xi)\, d\xi = q_i$, und die Belegungsfunktion der Integralgleichung (47) habe in der Mitte des $k$-ten Intervalls den Wert $b_k$. Alsdann ergibt sich unser Gleichungssystem in der Form:

$$\left.\begin{array}{l} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots + a_2\, q_{k-3} + a_1\, q_{k-2} + a_0\, q_{k-1} + a_{-1}\, q_k + a_{-2}\, q_{k+1} + \ldots = b_{k-1} \\ \quad \ldots + a_2\, q_{k-2} + a_1\, q_{k-1} + a_0\, q_k + a_{-1}\, q_{k+1} + a_{-2}\, q_{k+2} + \ldots = b_k \\ \qquad \ldots + a_2\, q_{k-1} + a_1\, q_k + a_0\, q_{k+1} + a_{-1}\, q_{k+2} + a_{-2}\, q_{k+3} + \ldots = b_{k+1} \\ \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right\} \quad (48\,a).$$

Die Lösungsmethode dieses Gleichungssystems wurde von O. Toeplitz angegeben[1]).

Wir bezeichnen mit $\zeta$ eine komplexe Variable. Alsdann läßt sich unser Gleichungssystem darstellen in der Form:

$$\left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \cdot \zeta^k\right)\left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} q_k \cdot \zeta^k\right) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} b_k \cdot \zeta^k \quad \ldots\ldots \quad (48\,b).$$

Es ergeben sich demnach die Unbekannten $q_k$ aus der Division zweier Laurentscher Reihen:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} q_k \cdot \zeta^k = \frac{\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} b_k \cdot \zeta^k}{\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} a_k \cdot \zeta^k} = \frac{\mathfrak{f}(\zeta)}{g(\zeta)} \quad \ldots\ldots \quad (49).$$

Da der Kern der Integralgleichung (47) eine gerade Funktion von $x - \xi$ ist, ergibt sich $a_k = a_{-k}$. Daraus folgt, daß mit $\zeta_0$ auch $\frac{1}{\zeta_0}$ stets Nullstelle für $g(\zeta)$, also Pol für $\frac{\mathfrak{f}(\zeta)}{g(\zeta)}$ ist. Eine Entwicklung von $\frac{\mathfrak{f}(\zeta)}{g(\zeta)}$ ist aber nur in solchen Kreisringen der $\zeta$-Ebene möglich, in denen keine Pole von $\frac{\mathfrak{f}(\zeta)}{g(\zeta)}$ liegen. Es ist nun $b_k = -b_{-k}$, und daher können wir schließen, daß auch die Unbekannten antisymmetrisch sind, daß also

$$q_k = -q_{-k}$$

ist. Diese Forderung bewirkt, daß der Kreisring, in dem die Lösung $\frac{\mathfrak{f}(\zeta)}{g(\zeta)}$ konvergiert, den Einheitskreis enthält. Zur Berechnung der Lösung gibt es folgende Möglichkeiten:

A) Nach dem Cauchyschen Integralsatz ist

$$q_k = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathfrak{K}} \frac{\mathfrak{f}(\zeta)}{g(\zeta)} \frac{d\zeta}{\zeta^{K+1}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (50)$$

wenn $\mathfrak{K}$ der Kreis ist, längs dessen die Lösung konvergieren soll, also in unserem Falle der Einheitskreis. Es wird nun für $\zeta = e^{i\vartheta}$ in unserem Falle $\frac{1}{i}\frac{\mathfrak{f}(\zeta)}{g(\zeta)}$ eine reine Sinusreihe von $\vartheta$, und daher

$$q_k = \frac{i}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\mathfrak{f}(e^{i\vartheta})}{g(e^{i\vartheta})} e^{ik\vartheta}\, d\vartheta\,, \qquad q_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \sin k\vartheta \sum_{n=0}^{\infty} b'_n \sin n\vartheta\, d\vartheta = b'_k \quad . \quad (51).$$

B) Man bildet aus $g(\zeta)$ eine reelle positive Größe, d. h. falls $g(\zeta)$ nicht ohnehin schon am Kreis $\mathfrak{K}$ diese Eigenschaft hat, bildet man $g(\zeta) \cdot \overline{g}(\zeta)$. Hierin ist $\overline{g}$ die zu $g$

[1]) Für die Mitteilung der folgenden Lösungsmöglichkeiten bin ich Herrn Prof. Dr. Toeplitz zu Dank verpflichtet. Vergl. hierzu: O. Toeplitz, Theorie der $L$-Formen, Math. Annalen Bd. 70 (1911), S. 351.

konjugiert komplexe Größe. Nun bestimmt man einen solchen reellen konstanten Faktor $\varrho$, daß

$$0 < \varrho\, g(\zeta)\, \overline{g(\zeta)} < 1$$

und $1/\varrho$ größer als das Maximum von $\varrho\, g(\zeta)\, \overline{g(\zeta)}$ ist. Sodann ist, wenn $m$ das Minimum von $\varrho\, g(\zeta)\, \overline{g(\zeta)}$ bedeutet:

$$0 < m \leq \varrho\, g(\zeta)\, \overline{g(\zeta)} < 1 \qquad \text{für } |\zeta| = 1;$$

daher ist

$$0 < 1 - \varrho\, g(\zeta)\, \overline{g(\zeta)} \leq 1 - m < 1 \qquad \text{für } |\zeta| = 1$$

und wir erhalten folgende Reihenentwicklung:

$$\frac{1}{1 - [1 - \varrho\, g(\zeta)\, \overline{g(\zeta)}]} = 1 + [1 - \varrho\, g(\zeta)\, \overline{g(\zeta)}] + [1 - \varrho\, g(\zeta)\, \overline{g(\zeta)}]^2 + \ldots \quad (52).$$

Diese Reihe ist konvergent. Nun ist aber:

$$\frac{1}{1 - [1 - \varrho\, g(\zeta)\, \overline{g(\zeta)}]} = \frac{1}{\varrho\, g(\zeta)\, \overline{g(\zeta)}} = h(\zeta).$$

Ist $h(\zeta)$ aus der Reihe (52) angenähert berechnet, so ergeben sich mit

$$\frac{1}{g(\zeta)} = \varrho\, \overline{g(\zeta)}\, h(\zeta) \quad \text{und} \quad \sum_{k=-\infty}^{\infty} q_k \cdot \zeta^k = \frac{\mathfrak{f}(\zeta)}{g(\zeta)} = \varrho\, \mathfrak{f}(\zeta)\, \overline{g(\zeta)}\, h(\zeta) \quad . \ (53)$$

Näherungswerte für die Unbekannten $q_k$.

Ist $g(\zeta)$ schon von vornherein längs $|\zeta| = 1$ eine positive reelle Größe, so gelten sinngemäß Festsetzungen für $\varrho\, g(\zeta)$ wie vorhin für $\varrho\, g(\zeta)\, \overline{g(\zeta)}$ und wir erhalten anstatt (52):

$$h(\zeta) = 1 + [1 - \varrho\, g(\zeta)] + [1 - \varrho\, g(\zeta)]^2 + \ldots \ldots \quad (52\,\text{a})$$

Die Näherungswerte für $q_k$ ergeben sich dann aus:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} q_k \cdot \zeta^k = \varrho\, \mathfrak{f}(\zeta)\, h(\zeta) \quad \ldots \ldots \quad (53\,\text{a}).$$

Die Frage, welche von den beiden Methoden im vorliegenden Falle zu empfehlen ist, läßt sich mit Rücksicht auf die Konvergenzgüte der Reihen $\mathfrak{f}(\zeta)$ und $g(\zeta)$ beantworten. Die Lösungsmethode A ist für gut konvergente Reihen $\mathfrak{f}(\zeta)$ und $g(\zeta)$ vorzuziehen, weil sie dann schneller zum Ziele führt. Bei unendlich breiter Tragfläche geht die Belegungsfunktion in der Integralgleichung (47) für $x = \infty$ wie $1/x$ gegen Null; die Konvergenz der Reihe $\mathfrak{f}(\zeta)$ ist also in diesem Falle schlecht, und wir wenden daher die Methode B an, die durch fortgesetzte Näherungen eine Verbesserung von angenäherten Werten $q_k$ gestattet.

Die Funktionen $\dfrac{2 - (x - \xi)^2}{[(x - \xi)^4 + 1]^{5/2}}$ und $x\left[1 - \dfrac{1}{\sqrt{1 + 1/x^2}}\right]$ liefern uns zunächst die Koeffizienten $a_n$ und $b_n$ der Reihen $g(\zeta)$ bzw. $\mathfrak{f}(\zeta)$:

| | | |
|---|---|---|
| $a_0 = 2{,}000$ , | $b_0 = 0$ | |
| $a_1 = 1{,}002$ , | $b_1 = 0{,}2764$ , | $b_{11} = 0{,}0889$ |
| $a_2 = 0{,}177$ , | $b_2 = 0{,}2929$ , | $b_{12} = 0{,}0816$ |
| $a_3 = -0{,}013$ , | $b_3 = 0{,}2519$ , | $b_{13} = 0{,}0758$ |
| $a_4 = -0{,}036$ , | $b_4 = 0{,}2112$ , | $b_{14} = 0{,}0703$ |
| $a_5 = -0{,}030$ , | $b_5 = 0{,}1788$ , | $b_{15} = 0{,}0658$ |
| $a_6 = -0{,}022$ , | $b_6 = 0{,}1539$ , | $b_{16} = 0{,}0618$ |
| $a_7 = -0{,}016$ , | $b_7 = 0{,}1347$ , | $b_{17} = 0{,}0583$ |
| $a_8 = -0{,}012$ , | $b_8 = 0{,}1195$ , | $b_{18} = 0{,}0552$ |
| $a_9 = -0{,}009$ , | $b_9 = 0{,}1072$ , | $b_{19} = 0{,}0524$ |
| $a_{10} = -0{,}007$ , | $b_{10} = 0{,}0970$ , | $b_{20} = 0{,}0496$ |
| $a_n = a_{-n}$ | $b_n = b_{-n}$. | |

Längs des Kreises $|\zeta| = 1$ ergeben sich für die Extremwerte der Reihe $g(\zeta) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \cdot \zeta^k$ folgende Schranken:

$$\text{Max}\, g(\zeta) < 4{,}058\,, \qquad 0{,}238 < \text{Min}\, g(\zeta) < 0{,}248.$$

Es ist demnach $g(\zeta)$ eine reelle positive Größe, und die Unbekannten $q_k$ ergeben sich aus (52 a) und (53 a). Zunächst ermitteln wir angenähert aus (52 a) die Reihe $h(\zeta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \cdot \zeta^n$.

Nun sei $h_k(\zeta)$ die Näherung von $h(\zeta)$, die bis zur $k$-ten Potenz von $1 - \bar{\varrho}\, g(\zeta)$ fortschreitet. Durch Potenzen von $g(\zeta)$ ausgedrückt, lautet dies:

$$h_k(\zeta) = \binom{k+1}{1} - \binom{k+1}{2} \bar{\varrho}\, g(\zeta) + \binom{k+1}{3} \bar{\varrho}^2 g^2(\zeta) - \ldots + (-1)^k \binom{k+1}{k+1} \bar{\varrho}^k g^k(\zeta) \qquad (54)$$

und wir setzen:

$$h_k(\zeta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n^{(k)} \zeta^n \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (54\,a).$$

Wir bilden zunächst die Potenzen von $g(\zeta)$:

$$g^k(\zeta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n^{(k)} \zeta^n.$$

Aus $a_n = a_{-n}$ ergibt sich nun $a_n^{(k)} = a_{-n}^{(k)}$, und wir erhalten

$$a_n^{(k)} = a_n\, a_0^{(k-1)} + 2 \sum_{m=1}^{\infty} a_{n-m}\, a_m^{(k-1)} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (55).$$

Die hiernach berechneten Werte $a_n^{(k)}$ sind in Zahlentafel 1 aufgeführt. Den Faktor $\bar{\varrho}$ wählen wir nun mit Berücksichtigung der eben angegebenen Schranken zu $\bar{\varrho} = 0{,}1$ und erhalten aus (54) die Koeffizienten $c_n^{(k)}$ in der Reihe $h_k(\zeta)$ zu:

$$c_n^{(k)} = \sum_{m=0}^{k} (-1)^m \binom{k+1}{m+1} \bar{\varrho}^m a_n^{(m)} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (54\,b).$$

Zahlentafel 1.

| $n =$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $a_n$ | 2,000 | 1,002 | 0,177 | − 0,013 | − 0,036 | − 0,030 | − 0,022 | − 0,016 | − 0,012 | − 0,009 | − 0,007 | − 0,005 |
| $a_n^{(2)}$ | 6,078 | 4,363 | 1,677 | 0,222 | − 0,207 | − 0,246 | − 0,196 | − 0,144 | − 0,106 | − 0,080 | − 0,058 | |
| $a_n^{(3)}$ | 21,51 | 17,58 | 9,02 | 2,38 | − 0,51 | − 1,36 | − 1,25 | − 0,97 | − 0,70 | − 0,52 | | |
| $a_n^{(4)}$ | 81,5 | 69,3 | 41,2 | 15,0 | − 0,5 | − 6,1 | − 6,9 | − 5,5 | − 4,3 | | | |
| $a_n^{(5)}$ | 317,0 | 276,2 | 179,1 | 77,4 | 7,3 | − 25,6 | − 33,5 | − 22,7 | | | | |
| $a_n^{(6)}$ | 1 252 | 1 111 | 761 | 367 | 65 | − 100 | − 152 | | | | | |
| $a_n^{(7)}$ | 5 000 | 4 480 | 3 190 | 1 650 | 390 | 360 | | | | | | |
| $a_n^{(8)}$ | 15 650 | 23 600 | 14 140 | 6 650 | 1 170 | | | | | | | |

Indem wir nach und nach $k$ vergrößern, verkleinert sich die Differenz $c_n^{(k)} - c_n^{(k-1)}$ langsam. Wir erhalten:

$$\bar{\varrho}\, h_7(\zeta) = \ldots 0{,}01\, \zeta^{-3} - 0{,}13\, \zeta^{-1} + 0{,}47 - 0{,}13\, \zeta + 0{,}01\, \zeta^3 + \ldots$$

$$\bar{\varrho}\, h_8(\zeta) = \ldots 0{,}01\, \zeta^{-3} - 0{,}15\, \zeta^{-1} + 0{,}50 - 0{,}15\, \zeta + 0{,}01\, \zeta^3 + \ldots \quad . \quad (56).$$

Nun ermitteln wir mit Hilfe von (53 a) und (56) erste Näherungswerte $q_k^I$. Setzen wir diese $q_k^I$ in unsere linearen Gleichungen (49 a) ein, so ergeben sich als Absolutglieder Werte $b_k^I$. Mit $b_k - b_k^I = \beta_k^I$ erhalten wir die Reihe $\gamma^I(\zeta) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \beta_k^I \zeta^k$. Sodann erhalten wir zweite Näherungswerte $q_k^{II} = q_k^I + \varepsilon_k^I$, worin die Verbesserungen $\varepsilon_k^I$ sich ergeben aus:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \varepsilon_k^I \zeta^k = \bar{\varrho}\, h(\zeta)\, \gamma^I(\zeta).$$

Indem wir so fortfahren, erhalten wir schließlich die $q_k$ mit der gewünschten Genauigkeit. Die Ergebnisse der Berechnung sind in Zahlentafel 2 (siehe S. 268) angegeben.

Wir haben in den vierten Näherungen $q_k^{IV}$ genügend genaue Werte für die $q_k$ und ermitteln mit diesen Werten die Auftriebsverteilung in der Längsrichtung des Rumpfes. Aus (13 b) ergibt sich dann mit Berücksichtigung von (46 a) der Anteil des Geschwindigkeitsfeldes u an der Auftriebsverteilung zu:

$$P_2(x) = \varrho\, V\, T \int_{-\infty}^{\infty} q(\xi)\, \frac{3\,(x-\xi)\, d\,\xi}{[(x-\xi)^2 + 1]^{5/2}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (57).$$

Nach Ermittlung der Funktion $q(\xi)$ folgt der Anteil $P_2(x)$ des Geschwindigkeitsfeldes u an der Auftriebsverteilung aus (57), und der vom Wirbelsystem herrührende Anteil ergibt sich nach (13a) zu:

$$P_1(x) = -\varrho V \Gamma \bar{\mathfrak{f}}_1(x) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (60).$$

Wir suchen nun zunächst die Geschwindigkeit infolge des Wirbelsystems. Ein Stück eines geradlinigen Wirbelfadens liefert nach dem Gesetz von **Biot-Savart** in einem Punkte $Q$ im Abstande $a$ vom Wirbelfaden einen Geschwindigkeitsvektor $\mathfrak{w}$, der senkrecht auf der Ebene des Punktes $Q$ und des Wirbelfadens steht und den Betrag

$$w = \frac{\Gamma}{4\pi} \frac{\cos \alpha_1 - \cos \alpha_2}{a} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (61)$$

erhält, wenn $\alpha_1$ und $\alpha_2$ die Winkel bezeichnen, die der Fahrstrahl vom Anfang bzw. vom Ende dieses Wirbelstückes zum Punkte $Q$ mit der Richtung des Wirbelfadens bildet. Die Beziehung (61) wenden wir auf den Wirbelfaden an, der durch die freien Wirbel in $y = 1/b$ und $y = b$ sowie durch den tragenden Wirbel in der $y$-Achse zwischen $1/b \leqq y \leqq b$ gebildet wird. Wir erhalten infolge des tragenden Wirbels an der Oberfläche des Rumpfes, d. h. für $r = 1$, eine Geschwindigkeitskomponente normal zum Rumpf:

$$w_r^I = \frac{\Gamma}{4\pi} \frac{x \sin \vartheta}{x^2 + \sin^2 \vartheta} \left[ \frac{b - \cos \vartheta}{\sqrt{1 + b^2 + x^2 - 2 b \cos \vartheta}} + \frac{b \cos \vartheta - 1}{\sqrt{1 + b^2 (1 + x^2) - 2 b \cos \vartheta}} \right] . \quad (62a),$$

sowie eine Geschwindigkeitskomponente längs des Rumpfes:

$$w_x^I = -\frac{1}{x} w_r^I \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (63).$$

Die freien Wirbel sowie deren gespiegelte Wirbel liefern keine Geschwindigkeitskomponente längs des Rumpfes; ihre Komponente normal zum Rumpf ist:

$$w_r^{II} = \frac{\Gamma}{4\pi} \frac{x b \sin \vartheta}{1 + b^2 - 2 b \cos \vartheta} \left[ \frac{1}{\sqrt{1 + b^2 + x^2 - 2 b \cos \vartheta}} - \frac{b}{\sqrt{1 + b^2 (1 + x^2) - 2 b \cos \vartheta}} \right] \quad (62b).$$

Wir haben also in $w_x^I$ sowie in $w_r^I + w_r^{II}$ die axial bzw. radial zum Rumpf gerichteten Geschwindigkeitskomponenten, welche von den im Halbraum des positiven $y$ liegenden Wirbeln herrühren. Die Wirbel im anderen Halbraum ergeben noch einen Anteil, der sich von den Ausdrücken (62) und (63) nur dadurch unterscheidet, daß $+\cos\vartheta$ sich jeweilig anstelle von $-\cos\vartheta$ ergibt. Nun suchen wir noch den ersten Koeffizienten der Sinusreihe für (62) und (63), d. h. wir bilden:

$$\mathfrak{f}_1(x) = 1/\Gamma \int_0^{2\pi} w_r \sin \vartheta \, d\pi \qquad \text{sowie} \qquad \bar{\mathfrak{f}}_1(x) = 1/\Gamma \int_0^{2\pi} w_x \sin \vartheta \, d\vartheta .$$

Hierbei können wir berücksichtigen, daß die Zusammenfassung der freien Wirbel in zwei von den Tragflächenenden ausgehende Wirbelzöpfe nur dann brauchbare Ergebnisse liefert, wenn das Breitenverhältnis $b$ genügend groß ist. Wir entwickeln daher die in (62) vorkommenden Ausdrücke $\left(1 \mp \frac{2b}{1+b^2} \cos\vartheta\right)^{-1}$ und $\left(1 \mp \frac{2b}{1+b^2+x^2} \cos\vartheta\right)^{-1/2}$ bzw. $\left(1 \mp \frac{2b}{1+b^2(1+x^2)} \cos\vartheta\right)^{-1/2}$ in Taylor-Reihen und erhalten mit einem Fehler von der Größenordnung $1/b^4$ aus (61a):

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{f}_1^I(x) = x \Bigg\{ & \left[1 - \frac{1}{\sqrt{1 + 1/x^2}}\right] \left[ \frac{b^3 [b^2 + {}^5/_2 (1 + x^2)]}{(1 + b^2 + x^2)^{5/2}} - \frac{1 + {}^5/_2 b^2 (1 + x^2)}{[1 + b^2 (1 + x^2)]^{5/2}} \right. \\ & \left. + \frac{5}{2} b^4 (1 + x^2) \frac{b^2 (1 + x^2) - {}^3/_4}{[1 + b^2 (1 + x^2)]^{5/2}} \right] - \frac{1}{2} \left[ b \frac{b^2/_2 - (1 + x^2)}{(1 + b^2 + x^2)^{5/2}} \right. \\ & \left. + b^2 \frac{b^2 (1 + x^2) - {}^1/_2}{[1 + b^2 (1 + x^2)]^{5/2}} + \frac{5}{2} \left(\frac{5}{4} + x^2\right) \frac{b^2 (1 + x^2) - {}^3/_4}{[1 + b^2 (1 + x^2)]^{9/2}} \right] \Bigg\} \end{aligned}\right\} . \quad (64a)$$

und aus (61b):

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{f}_1^{II}(x) = & \frac{x b}{(1 + b^2) \sqrt{1 + b^2 + x^2}} \left[ 1 + \frac{b^2}{(1 + b^2)^2} + \frac{1}{2} \frac{b^2}{(1 + b^2)(1 + b^2 + x^2)} + \frac{3}{8} \frac{b^2}{(1 + b^2 + x^2)^2} \right] \\ & - \frac{x b^2}{(1 + b^2) \sqrt{1 + b^2 (1 + x^2)}} \left[ 1 + \frac{b^2}{(1 + b^2)^2} + \frac{1}{2} \frac{b^2}{(1 + b^2)[1 - b^2 (1 + x^2)]} + \frac{3}{8} \frac{b^2}{[1 + b^2 (1 + x^2)]} \right] \end{aligned}\right\} \quad (64b).$$

Hiermit sind die Funktionen $\mathfrak{f}_1(x) = \mathfrak{f}_1{}^I(x) + \mathfrak{f}_1{}^{II}(x)$ sowie $\bar{\mathfrak{f}}_1(x) = -1/x\, \mathfrak{f}_1{}^I(x)$ bekannt. Der Anteil des Wirbelfadens an der Auftriebsverteilung ergibt sich dann nach (60) zu:

$$P_1(x) = \varrho\, V\, \Gamma \frac{1}{x} \mathfrak{f}_1{}^I(x) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (65).$$

Nun ist die Verteilung der $q(\xi)$ aus der Integralgleichung (59) zu ermitteln. Wir teilen zu diesem Zwecke den Bereich $-\infty < \xi < \infty$ in derselben Weise wie vorhin in Intervalle von der Länge $\delta = 0{,}5$ ein. Abweichend von dem Vorgange in **7** nehmen wir $q(\xi)$ in jedem Intervall konstant an und bezeichnen den Wert von $q(\xi)$ im $k$-ten Intervall mit $q_k$. Alsdann erhalten wir wieder an Stelle der Integralgleichung (59) ein System von zweifach unendlich vielen linearen Gleichungen mit ebenso vielen Unbekannten $q_k$. Die Koeffizienten der Unbekannten sind in allen Gleichungen dieselben, und unser Gleichungssystem hat wieder die Form (48a) bzw. (48b). Die Koeffizienten $a_n$ ergeben sich infolge der konstanten Verteilung von $q(\xi)$ über die einzelnen Intervalle zu;

$$a_n = \int\limits_{(n - 1/2)\delta}^{(n + 1/2)\delta} \frac{2 - \alpha^2}{[\alpha^2 + 1]^{5/2}}\, d\alpha .$$

Es wird also:

$$a_n = \delta \left\{ \frac{(n + 1/2)\,[2 + (n + 1/2)^2 \delta^2]}{[1 + (n + 1/2)^2 \delta^2]^{3/2}} - \frac{(n - 1/2)\,[2 + (n - 1/2)^2 \delta^2]}{[1 + (n - 1/2)^2 \delta]^{3/2}} \right\} \quad . \quad . \quad . \quad (66),$$

sowie $a_n = a_{-n}$ und wir erhalten folgende Werte:

$a_0 = 0{,}9416$, $a_1 = 0{,}5132$, $a_2 = 0{,}1016$, $a_3 = -0{,}0037$, $a_4 = -0{,}0175$,
$a_5 = -0{,}0150$, $a_6 = -0{,}0111$, $a_7 = -0{,}0081$, $a_8 = -0{,}0059$,
$a_9 = -0{,}0044$, $a_{10} = -0{,}0034$, $a_{11} = -0{,}0026$, $a_{12} = -0{,}0021$,

für die Koeffizienten $d_n$ in (57a) ergibt sich

$$d_n = \int\limits_{(n - 1/2)\delta}^{(n + 1/2)\delta} \frac{3\,\alpha\, d\alpha}{[\alpha^2 + 1]^{5/2}} = \frac{1}{[1 + (n + 1/2)^2 \delta^2]^{3/2}} - \frac{1}{[1 - (n - 1/2)^2 \delta^2]^{3/2}} \quad . \quad . \quad . \quad (67)$$

und die Zahlenwerte lauten:

$d_0 = 0$, $d_1 = -0{,}4010$, $d_2 = -0{,}2682$, $d_3 = -0{,}1217$, $d_4 = -0{,}0551$, $d_5 = -0{,}0271$,
$d_6 = -0{,}0146$, $d_7 = -0{,}0080$, $d_8 = -0{,}0051$, $d_9 = -0{,}0033$, $d_{10} = -0{,}0021$.

Als Beispiel ist die Auftriebsverteilung längs des Rumpfes für das Breitenverhältnis $b = 10$ berechnet. Es ergeben sich dann die Randwerte nach (64) zu:

$b_0 = 0$, $b_1 = 0{,}2373$, $b_2 = 0{,}2425$, $b_3 = 0{,}2006$, $b_4 = 0{,}1622$, $b_5 = 0{,}1322$,
$b_6 = 0{,}1091$, $b_7 = 0{,}0915$, $b_8 = 0{,}0779$, $b_9 = 0{,}0668$, $b_{10} = 0{,}0582$,
$b_{11} = 0{,}0509$, $b_{12} = 0{,}0448$, $b_{13} = 0{,}0401$, $b_{14} = 0{,}0356$, $b_{15} = 0{,}0320$,
$b_{16} = 0{,}0291$, $b_{17} = 0{,}0264$, $b_{18} = 0{,}0241$, $b_{19} = 0{,}0220$, $b_{20} = 0{,}0202$,
$b_{21} = 0{,}0182$, $b_{22} = 0{,}0164$, $b_{23} = 0{,}0147$, $b_{24} = 0{,}0131$,

$$b_n = -b_{-n}.$$

Da die Werte $b_n$ wesentlich rascher abklingen als bei unendlich breiter Tragfläche, schlagen wir die Lösungsmethode $A$ (S. 265) ein, die nicht soviel Rechenaufwand verursacht wie die Lösungsmethode $B$. Nach (51) ergeben sich die Unbekannte $q_k$ zu

$$q_k = b_k' \quad \text{und} \quad q_k = -q_{-k} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (68\text{a}),$$

wenn die $b_k'$ berechnet werden aus

$$\sum_{k=0}^{\infty} b_k' \sin k\,\vartheta = \frac{\sum\limits_{k=0}^{\infty} b_k \sin k\,\vartheta}{a_0 + 2 \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k \cos k\,\vartheta} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (68\text{b}).$$

Wir bestimmen demnach $\mathfrak{f}_\lambda = \sum\limits_{k=0}^{\infty} b_k \sin k\,\vartheta_\lambda$ sowie $g_\lambda = a_0 + 2 \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k \cos k\,\vartheta_\lambda$ näherungsweise für die Winkel $\vartheta_\lambda = \lambda \frac{\pi}{24}$, bilden die Größen $\mathfrak{f}_\lambda' = \frac{\mathfrak{f}_\lambda}{g_\lambda}$ und führen sodann die harmonische Analyse für die durch äquidistante Werte $\mathfrak{f}_\lambda'$ gegebene Funktion $\mathfrak{f}'(\vartheta)$ durch; als Koeffizienten erhalten wir dadurch Näherungswerte für $q_k$. Zahlentafel 4 gibt die Ergebnisse der Berechnung wieder.

Zahlentafel 2.

| $k$ | $b_k$ | $q_k^{I}$ | $\beta_k^{I}$ | $\varepsilon_k^{I}$ | $q_k^{II}$ | $\beta_k^{II}$ | $\varepsilon_k^{II}$ | $q_k^{III}$ | $\beta_k^{III}$ | $\varepsilon_k^{III}$ | $q_k^{IV}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | | | | | | | | | | 0 |
| 1 | 0,2764 | 0,0935 | 0,0286 | 0.0139 | 0,1074 | 0,0072 | 0,0029 | 0,1100 | 0,0060 | − 0,0030 | 0,1070 |
| 2 | 0,2929 | 0.0662 | 0,0032 | − 0,0042 | 0,0620 | − 0,0049 | − 0,0040 | 0,0580 | − 0,0006 | 0,0015 | 0,0595 |
| 3 | 0,2519 | 0,0519 | 0,0084 | 0,0022 | 0.0541 | 0,0024 | 0,0018 | 0,0560 | 0,0022 | − 0,0010 | 0,0550 |
| 4 | 0,2112 | 0,0451 | 0,0106 | 0,0027 | 0,0478 | 0,0010 | 0,0002 | 0,0480 | − 0,0003 | 0,0005 | 0,0485 |
| 5 | 0,1788 | 0,0387 | 0,0117 | 0,0026 | 0,0413 | 0,0000 | − 0,0003 | 0,0410 | — | — | 0,0410 |
| 6 | 0,1539 | 0,0336 | 0,0111 | 0,0023 | 0,0359 | 0,0009 | 0,0003 | 0,0360 | — | — | 0,0360 |
| 7 | 0,1347 | 0,0295 | 0,0115 | 0,0025 | 0,0320 | 0,0015 | 0,0004 | 0,0325 | — | — | 0,0325 |
| 8 | 0,1195 | 0,0262 | 0,0118 | 0,0026 | 0,0288 | 0,0011 | 0,0002 | 0,0290 | — | — | 0,0290 |
| 9 | 0,1072 | 0,0234 | 0,0119 | 0,0026 | 0,0260 | 0,0014 | 0,0004 | 0,0265 | — | — | 0,0265 |
| 10 | 0,0970 | 0,0212 | 0,0115 | 0,0025 | 0,0237 | 0,0010 | 0,0001 | 0,0240 | — | — | 0,0240 |
| 11 | 0,0889 | 0,0196 | 0,0108 | 0,0024 | 0,0220 | 0,0010 | 0,0003 | 0,0225 | — | — | 0,0225 |
| 12 | 0,0816 | 0,0179 | 0,0100 | 0,0023 | 0.0202 | 0,0006 | 0,0001 | 0,0205 | — | — | 0,0205 |
| 13 | 0,0758 | 0,0168 | | | 0,019 | | | 0,019 | | | 0,019 |
| 14 | 0,0703 | 0,0154 | | | 0,017 | | | 0,017 | | | 0,017 |
| 15 | 0,0658 | 0,0145 | | | 0,016 | | | 0,016 | | | 0,016 |
| 16 | 0,0618 | 0,0136 | | | 0,015 | | | 0,015 | | | 0,015 |
| 17 | 0,0583 | 0,0128 | | | 0,014 | | | 0,014 | | | 0,014 |
| 18 | 0,0552 | 0,0122 | | | 0,013 | | | 0,013 | | | 0,013 |
| 19 | 0,0524 | 0,0116 | | | 0,013 | | | 0,013 | | | 0,013 |
| 20 | 0,0496 | 0,0109 | | | 0,012 | | | 0,012 | | | 0,012 |

Die Konzentration der Doppelquellen in die Mittelpunkte der Intervalle ermöglicht uns nun die Berechnung der Werte $P_2(x)$ für diese Punkte. Wir berücksichtigen, daß $\frac{x-\xi}{[(x-\xi)^2+1]^{5/2}}$ eine ungerade Funktion von $x-\xi$ ist. Setzen wir nun den Wert dieser Einflußfunktion gleich $d_n$, wenn $x-\xi$ der Mittenabstand vom $k$-ten zum $k+n$-ten Intervall ist, so ergibt sich:

$$P_{2k} = 3\,\varrho\,V\,\Gamma \sum_{n=-\infty}^{\infty} q_{n+k}\,d_n \quad \text{. . . . . . . . . (57 a).}$$

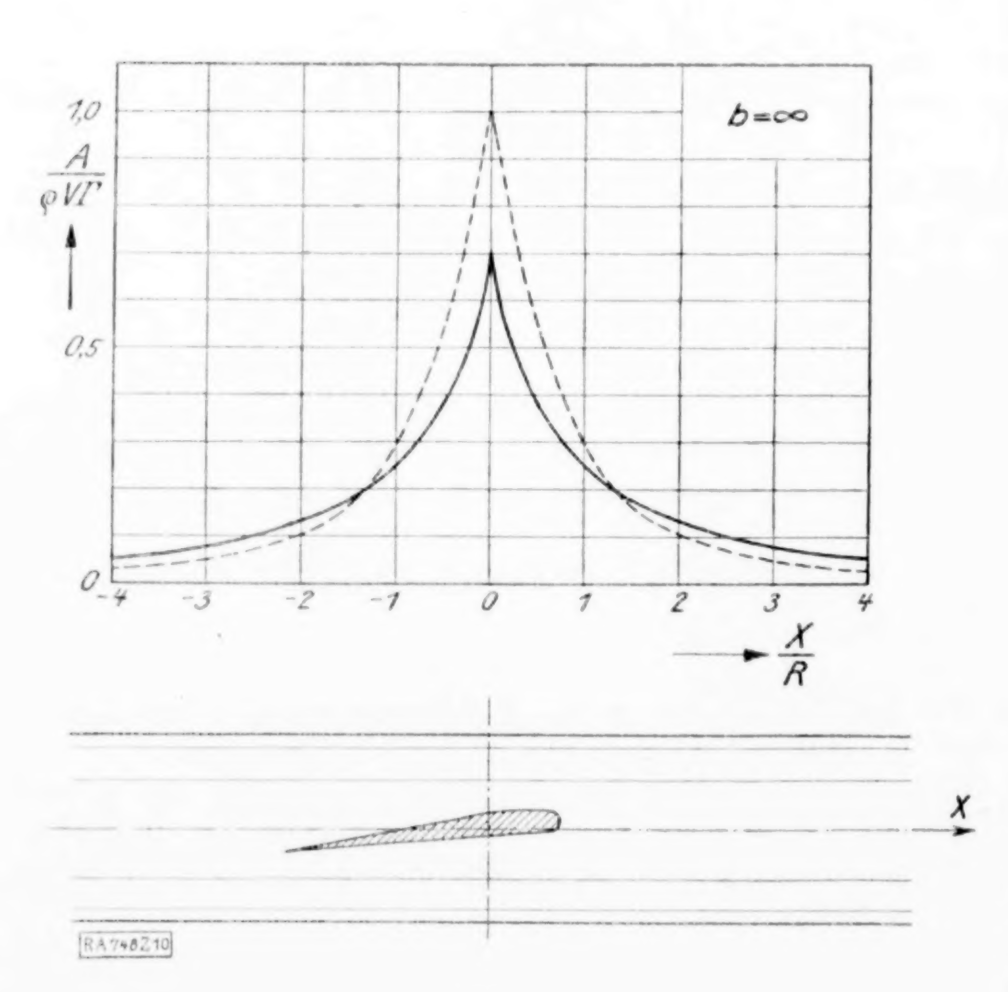



Abb. 10.

Die Werte für $d_n$ sind:

$d_0 = \quad 0$,
$d_1 = -0{,}2862$,
$d_2 = -0{,}1768$,
$d_3 = -0{,}0788$,
$d_4 = -0{,}0358$,
$d_5 = -0{,}0177$,
$d_6 = -0{,}0095$,
$d_7 = -0{,}0055$,
$d_8 = -0{,}0034$,
$d_9 = -0{,}0022$,
$d_{10} = -0{,}0015$,
$d_{11} = -0{,}0010$,
$d_{12} = -0{,}0007$,
$d_{13} = -0{,}0005$,
$d_n = -d_{-n}$.

Nun bestimmen wir aus (57 a) die Werte $\frac{P_2}{\varrho\,V\,\Gamma}$ für die Mittelpunkte der Intervalle und erhalten dadurch den Anteil des Geschwindigkeitsfeldes u an der

Auftriebsverteilung. Gleichzeitig berechnen wir aus (15) den Anteil $\frac{P_1}{\varrho V \Gamma}$, der vom Wirbelfaden herrührt. Die gesamte Auftriebsverteilung $A' = P_1 + P_2$ ist in Zahlentafel 3 aufgestellt. Hierin sind die Absolutwerte der axialen Koordinate mit $X$ und der Rumpfradius mit $R$ bezeichnet. Da sowohl $P_1$ als auch $P_2$ gerade Funktionen von $x$ sind, gilt auch:

$$A'(x) = A'(-x).$$

Zahlentafel 3.
Auftriebsverteilung längs des Rumpfes bei unendlich breiter Tragfläche

| $x = \frac{X}{R}$ | $\frac{P_1}{\varrho V \Gamma}$ | $\frac{P_2}{\varrho V \Gamma}$ | $\frac{A'}{\varrho V \Gamma}$ |
|---|---|---|---|
| 0 | 1,0000 | − 0,2936 | 0,7064 |
| 0,5 | 0,5528 | − 0,1819 | 0,3709 |
| 1,0 | 0,2929 | − 0,0358 | 0,2571 |
| 1,5 | 0,1679 | 0,0112 | 0,1791 |
| 2,0 | 0,1056 | 0,0266 | 0,1322 |
| 2,5 | 0,0715 | 0,0304 | 0,1019 |
| 3,0 | 0,0513 | 0,0280 | 0,0793 |
| 3,5 | 0,0385 | 0,0250 | 0,0635 |
| 4,0 | 0,0299 | 0,0218 | 0,0517 |

In Abb. 10 stellt die gestrichelte Kurve den Verlauf von $\frac{P_1}{\varrho V \Gamma}$ und die ausgezogene Linie den Verlauf von $\frac{A'}{\varrho V \Gamma}$ in der Nähe der Tragfläche dar.

**8. Auftriebsverteilung längs des Rumpfes bei endlich breiter Tragfläche mit konstanter Zirkulationsverteilung.** Nunmehr gehen wir zur Tragfläche von endlicher Breite über und fragen nach der Auftriebsverteilung in der Längsrichtung des unendlich langen Zylinders, wenn die Zirkulationsverteilung $\Gamma$ über die Tragflächenbreite konstant ist. Die von den Enden der Tragfläche abgehenden freien Wirbel nehmen wir geradlinig parallel der $x$-Achse an. Diese freien Wirbel bilden dann mit dem tragenden Wirbel an der Tragfläche einen Hufeisenwirbel von der Zirkulation $\Gamma$. Durch Spiegelung der freien Wirbel an der Oberfläche des Rumpfes entsteht im Innern des Rumpfes ein gegenläufiger Hufeisenwirbel von gleich großer Zirkulation. Durch beide Hufeisenwirbel erhalten wir eine Strömung, bei der im Unendlichen die Normalkomponente der Geschwindigkeit am Rumpf verschwindet. Die vollständige Bewegung ergibt sich sodann durch Ueberlagerung einer Zusatzströmung, die nur in der Nähe der Tragfläche von Einfluß ist.

Das vom Wirbelsystem herrührende Geschwindigkeitsfeld $\mathfrak{w}$ hat eine Geschwindigkeitskomponente normal zur Rumpfoberfläche von der Form:

$$w_n = \Gamma/\pi \sum_{k=1}^{\infty} \sin k\,\vartheta \cdot \mathfrak{f}_k(x) \quad \ldots \ldots \quad (58\,a),$$

sowie eine Geschwindigkeitskomponente längs der Mantellinien des Rumpfes:

$$w_x = \Gamma/\pi \sum_{k=1}^{\infty} \sin k\,\vartheta \; \bar{\mathfrak{f}}_k(x) \quad \ldots \ldots \quad (58\,b).$$

Nun benutzen wir wieder die Tatsache, daß in den Fourier-Reihen für die Geschwindigkeitskomponenten nur das erste Glied jeweilig einen Beitrag zur Auftriebsverteilung längs des Rumpfes liefert. In entsprechender Weise wie bei unendlich breiter Tragfläche nehmen wir daher einen Doppelquellfaden längs der Rumpfachse an und überlagern dadurch ein Geschwindigkeitsfeld $\mathfrak{u}$, dessen Potentialfunktion sich aus (46 a) ergibt. Wir erfüllen nun an der Rumpfoberfläche die Randbedingung $w_n + u_n = 0$ für das erste harmonische Glied von $w_n$ und erhalten dadurch als Bedingungsgleichung für die Intensität des Doppelquellfadens:

$$\mathfrak{f}_1(x) = \int_{-\infty}^{\infty} q(\xi)\, \frac{2-(x-\xi)^2}{[(x-\xi)^2+1]^{5/2}}\, d\,\xi \quad \ldots \ldots \quad (59).$$

Nach Ermittlung der Funktion $q(\xi)$ folgt der Anteil $P_2(x)$ des Geschwindigkeitsfeldes u an der Auftriebsverteilung aus (57), und der vom Wirbelsystem herrührende Anteil ergibt sich nach (13a) zu:

$$P_1(x) = -\varrho V \Gamma \bar{\mathfrak{f}}_1(x) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (60).$$

Wir suchen nun zunächst die Geschwindigkeit infolge des Wirbelsystems. Ein Stück eines geradlinigen Wirbelfadens liefert nach dem Gesetz von Biot-Savart in einem Punkte $Q$ im Abstande $a$ vom Wirbelfaden einen Geschwindigkeitsvektor $\mathfrak{w}$, der senkrecht auf der Ebene des Punktes $Q$ und des Wirbelfadens steht und den Betrag

$$w = \frac{\Gamma}{4\pi} \frac{\cos\alpha_1 - \cos\alpha_2}{a} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (61)$$

erhält, wenn $\alpha_1$ und $\alpha_2$ die Winkel bezeichnen, die der Fahrstrahl vom Anfang bzw. vom Ende dieses Wirbelstückes zum Punkte $Q$ mit der Richtung des Wirbelfadens bildet. Die Beziehung (61) wenden wir auf den Wirbelfaden an, der durch die freien Wirbel in $y = 1/b$ und $y = b$ sowie durch den tragenden Wirbel in der $y$-Achse zwischen $1/b \leqq y \leqq b$ gebildet wird. Wir erhalten infolge des tragenden Wirbels an der Oberfläche des Rumpfes, d. h. für $r = 1$, eine Geschwindigkeitskomponente normal zum Rumpf:

$$w_r^I = \frac{\Gamma}{4\pi} \frac{x \sin\vartheta}{x^2 + \sin^2\vartheta} \left[ \frac{b - \cos\vartheta}{\sqrt{1 + b^2 + x^2 - 2b\cos\vartheta}} + \frac{b\cos\vartheta - 1}{\sqrt{1 + b^2(1 + x^2) - 2b\cos\vartheta}} \right] \quad . \quad (62a),$$

sowie eine Geschwindigkeitskomponente längs des Rumpfes:

$$w_x^I = -\frac{1}{x} w_r^I \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (63).$$

Die freien Wirbel sowie deren gespiegelte Wirbel liefern keine Geschwindigkeitskomponente längs des Rumpfes; ihre Komponente normal zum Rumpf ist:

$$w_r^{II} = \frac{\Gamma}{4\pi} \frac{x b \sin\vartheta}{1 + b^2 - 2b\cos\vartheta} \left[ \frac{1}{\sqrt{1 + b^2 + x^2 - 2b\cos\vartheta}} - \frac{b}{\sqrt{1 + b^2(1 + x^2) - 2b\cos\vartheta}} \right] \quad (62b).$$

Wir haben also in $w_x^I$ sowie in $w_r^I + w_r^{II}$ die axial bzw. radial zum Rumpf gerichteten Geschwindigkeitskomponenten, welche von den im Halbraum des positiven $y$ liegenden Wirbeln herrühren. Die Wirbel im anderen Halbraum ergeben noch einen Anteil, der sich von den Ausdrücken (62) und (63) nur dadurch unterscheidet, daß $+\cos\vartheta$ sich jeweilig anstelle von $-\cos\vartheta$ ergibt. Nun suchen wir noch den ersten Koeffizienten der Sinusreihe für (62) und (63), d. h. wir bilden:

$$\mathfrak{f}_1(x) = 1/\Gamma \int_0^{2\pi} w_r \sin\vartheta \, d\pi \qquad \text{sowie} \qquad \bar{\mathfrak{f}}_1(x) = 1/\Gamma \int_0^{2\pi} w_x \sin\vartheta \, d\vartheta \, .$$

Hierbei können wir berücksichtigen, daß die Zusammenfassung der freien Wirbel in zwei von den Tragflächenenden ausgehende Wirbelzöpfe nur dann brauchbare Ergebnisse liefert, wenn das Breitenverhältnis $b$ genügend groß ist. Wir entwickeln daher die in (62) vorkommenden Ausdrücke $\left(1 \mp \frac{2b}{1+b^2}\cos\vartheta\right)^{-1}$ und $\left(1 \mp \frac{2b}{1+b^2+x^2}\cos\vartheta\right)^{-1/2}$ bzw. $\left(1 \mp \frac{2b}{1+b^2(1+x^2)}\cos\vartheta\right)^{-1/2}$ in Taylor-Reihen und erhalten mit einem Fehler von der Größenordnung $1/b^4$ aus (61a):

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{f}_1^I(x) = x \Bigg\{ & \left[1 - \frac{1}{\sqrt{1 + 1/x^2}}\right] \left[ \frac{b^3 [b^2 + {}^5/_2 (1 + x^2)]}{(1 + b^2 + x^2)^{5/2}} - \frac{1 + {}^5/_2\, b^2 (1 + x^2)}{[1 + b^2(1 + x^2)]^{5/2}} \right. \\ & \left. + \frac{5}{2} b^4 (1 + x^2) \frac{b^2(1 + x^2) - {}^3/_4}{[1 + b^2(1 + x^2)]^{5/2}} \right] - \frac{1}{2} \left[ b \frac{b^2/2 - (1 + x^2)}{(1 + b^2 + x^2)^{5/2}} \right. \\ & \left. + b^2 \frac{b^2(1 + x^2) - {}^1/_2}{[1 + b^2(1 + x^2)]^{5/2}} + \frac{5}{2}\left(\frac{5}{4} + x^2\right) \frac{b^2(1 + x^2) - {}^3/_4}{[1 + b^2(1 + x^2)]^{9/2}} \right] \Bigg\} \end{aligned}\right\} \quad . \quad (64a)$$

und aus (61b):

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{f}_1^{II}(x) = & \frac{x b}{(1 + b^2)\sqrt{1 + b^2 + x^2}} \left[1 + \frac{b^2}{(1 + b^2)^2} + \frac{1}{2} \frac{b^2}{(1 + b^2)(1 + b^2 + x^2)} + \frac{3}{8} \frac{b^2}{(1 + b^2 + x^2)^2}\right] \\ & - \frac{x b^2}{(1 + b^2)\sqrt{1 + b^2(1 + x^2)}} \left[1 + \frac{b^2}{(1 + b^2)^2} + \frac{1}{2} \frac{b^2}{(1 + b^2)[1 - b^2(1 + x^2)]} + \frac{3}{8} \frac{b^2}{[1 + b^2(1 + x^2)]}\right] \end{aligned}\right\} \quad (64b).$$

Hiermit sind die Funktionen $\mathfrak{f}_1(x) = \mathfrak{f}_1{}^{I}(x) + \mathfrak{f}_1{}^{II}(x)$ sowie $\bar{\mathfrak{f}}_1(x) = -1/x\, \mathfrak{f}_1{}^{I}(x)$ bekannt. Der Anteil des Wirbelfadens an der Auftriebsverteilung ergibt sich dann nach (60) zu:

$$P_1(x) = \varrho V \Gamma \frac{1}{x} \mathfrak{f}_1{}^{I}(x) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (65).$$

Nun ist die Verteilung der $q(\xi)$ aus der Integralgleichung (59) zu ermitteln. Wir teilen zu diesem Zwecke den Bereich $-\infty < \xi < \infty$ in derselben Weise wie vorhin in Intervalle von der Länge $\delta = 0{,}5$ ein. Abweichend von dem Vorgange in **7** nehmen wir $q(\xi)$ in jedem Intervall konstant an und bezeichnen den Wert von $q(\xi)$ im $k$-ten Intervall mit $q_k$. Alsdann erhalten wir wieder an Stelle der Integralgleichung (59) ein System von zweifach unendlich vielen linearen Gleichungen mit ebenso vielen Unbekannten $q_k$. Die Koeffizienten der Unbekannten sind in allen Gleichungen dieselben, und unser Gleichungssystem hat wieder die Form (48a) bzw. (48b). Die Koeffizienten $a_n$ ergeben sich infolge der konstanten Verteilung von $q(\xi)$ über die einzelnen Intervalle zu;

$$a_n = \int\limits_{(n-1/2)\delta}^{(n+1/2)\delta} \frac{2-\alpha^2}{[\alpha^2+1]^{5/2}}\, d\alpha .$$

Es wird also:

$$a_n = \delta \left\{ \frac{(n+1/2)\,[2+(n+1/2)^2\,\delta^2]}{[1+(n+1/2)^2\,\delta^2]^{3/2}} - \frac{(n-1/2)\,[2+(n-1/2)^2\,\delta^2]}{[1+(n-1/2)^2\,\delta]^{3/2}} \right\} \quad . \quad . \quad . \quad (66),$$

sowie $a_n = a_{-n}$ und wir erhalten folgende Werte:

$a_0 = 0{,}9416$, $a_1 = 0{,}5132$, $a_2 = 0{,}1016$, $a_3 = -0{,}0037$, $a_4 = -0{,}0175$,
$a_5 = -0{,}0150$, $a_6 = -0{,}0111$, $a_7 = -0{,}0081$, $a_8 = -0{,}0059$,
$a_9 = -0{,}0044$, $a_{10} = -0{,}0034$, $a_{11} = -0{,}0026$, $a_{12} = -0{,}0021$,

für die Koeffizienten $d_n$ in (57a) ergibt sich

$$d_n = \int\limits_{(n-1/2)\delta}^{(n+1/2)\delta} \frac{3\,\alpha\, d\alpha}{[\alpha^2+1]^{5/2}} = \frac{1}{[1+(n+1/2)^2\,\delta^2]^{3/2}} - \frac{1}{[1-(n-1/2)^2\,\delta^2]^{3/2}} \quad . \quad . \quad . \quad (67)$$

und die Zahlenwerte lauten:

$d_0 = 0$, $d_1 = -0{,}4010$, $d_2 = -0{,}2682$, $d_3 = -0{,}1217$, $d_4 = -0{,}0551$, $d_5 = -0{,}0271$,
$d_6 = -0{,}0146$, $d_7 = -0{,}0080$, $d_8 = -0{,}0051$, $d_9 = -0{,}0033$, $d_{10} = -0{,}0021$.

Als Beispiel ist die Auftriebsverteilung längs des Rumpfes für das Breitenverhältnis $b = 10$ berechnet. Es ergeben sich dann die Randwerte nach (64) zu:

$b_0 = 0$, $b_1 = 0{,}2373$, $b_2 = 0{,}2425$, $b_3 = 0{,}2006$, $b_4 = 0{,}1622$, $b_5 = 0{,}1322$,
$b_6 = 0{,}1091$, $b_7 = 0{,}0915$, $b_8 = 0{,}0779$, $b_9 = 0{,}0668$, $b_{10} = 0{,}0582$,
$b_{11} = 0{,}0509$, $b_{12} = 0{,}0448$, $b_{13} = 0{,}0401$, $b_{14} = 0{,}0356$, $b_{15} = 0{,}0320$,
$b_{16} = 0{,}0291$, $b_{17} = 0{,}0264$, $b_{18} = 0{,}0241$, $b_{19} = 0{,}0220$, $b_{20} = 0{,}0202$,
$b_{21} = 0{,}0182$, $b_{22} = 0{,}0164$, $b_{23} = 0{,}0147$, $b_{24} = 0{,}0131$,

$$b_n = -b_{-n}.$$

Da die Werte $b_n$ wesentlich rascher abklingen als bei unendlich breiter Tragfläche, schlagen wir die Lösungsmethode $A$ (S. 265) ein, die nicht soviel Rechenaufwand verursacht wie die Lösungsmethode $B$. Nach (51) ergeben sich die Unbekannte $q_k$ zu

$$q_k = b_k' \quad \text{und} \quad q_k = -q_{-k} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (68\,\text{a}),$$

wenn die $b_k'$ berechnet werden aus

$$\sum_{k=0}^{\infty} b_k' \sin k\,\vartheta = \frac{\sum\limits_{k=0}^{\infty} b_k \sin k\,\vartheta}{a_0 + 2 \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k \cos k\,\vartheta} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (68\,\text{b}).$$

Wir bestimmen demnach $\mathfrak{f}_\lambda = \sum\limits_{k=0}^{\infty} b_k \sin k\,\vartheta_\lambda$ sowie $g_\lambda = a_0 + 2 \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k \cos k\,\vartheta_\lambda$ näherungsweise für die Winkel $\vartheta_\lambda = \lambda \frac{\pi}{24}$, bilden die Größen $\mathfrak{f}_\lambda' = \frac{\mathfrak{f}_\lambda}{g_\lambda}$ und führen sodann die harmonische Analyse für die durch äquidistante Werte $\mathfrak{f}_\lambda'$ gegebene Funktion $\mathfrak{f}'(\vartheta)$ durch; als Koeffizienten erhalten wir dadurch Näherungswerte für $q_k$. Zahlentafel 4 gibt die Ergebnisse der Berechnung wieder.

Zahlentafel 4.

| $\vartheta_\lambda$ | $\mathfrak{f}_\lambda$ | $g_\lambda$ | $\mathfrak{f}'_\lambda = \frac{f_\lambda}{g_\lambda}$ | $\vartheta_\lambda$ | $\mathfrak{f}_\lambda$ | $g_\lambda$ | $\mathfrak{f}'_\lambda = \frac{f_\lambda}{g_\lambda}$ | $q_k$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $0^0$ | 0 | 2,0236 | 0 | | | | | $q_0 = 0$, |
| $7^1/_2{}^0$ | 0,9660 | 2.0572 | 0,4696 | $97^1/_2{}^0$ | 0,1011 | 0,5983 | 0,1690 | $q_1 = 0{,}2276$, $q_{11} = 0{,}0257$ |
| $15^0$ | 0,7578 | 2,1099 | 0,3592 | $105^0$ | 0,0730 | 0,4996 | 0,1461 | $q_2 = 0{,}0663$, $q_{12} = 0{,}0225$ |
| $22^1/_2{}^0$ | 0,7128 | 2,0997 | 0,3395 | $112^1/_2{}^0$ | 0,0692 | 0,4126 | 0,1677 | $q_3 = 0{,}1050$, $q_{13} = 0{,}0209$ |
| $30^0$ | 0,5330 | 2,0056 | 0,2658 | $120^0$ | 0,0488 | 0,3367 | 0.1450 | $q_4 = 0{,}0647$, $q_{14} = 0{,}0186$ |
| $37^1/_2{}^0$ | 0,4764 | 1,8654 | 0,2554 | $127^1/_2{}^0$ | 0,0452 | 0,2773 | 0,1629 | $q_5 = 0{,}0637$, $q_{15} = 0{,}0161$ |
| $45^0$ | 0,3582 | 1,7074 | 0,2098 | $135^0$ | 0,0310 | 0,2306 | 0,1406 | $q_6 = 0{,}0502$, $q_{16} = 0{,}0147$ |
| $52^1/_2{}^0$ | 0,3190 | 1.5313 | 0,2083 | $142^1/_2{}^0$ | 0,0294 | 0,1900 | 0,1547 | $q_7 = 0{,}0436$, $q_{17} = 0{,}0132$ |
| $60^0$ | 0,2398 | 1,3441 | 0,1784 | $150^0$ | 0,0192 | 0,1568 | 0.1225 | $q_8 = 0{,}0382$, $q_{18} = 0{,}0115$ |
| $67^1/_2{}^0$ | 0,2160 | 1,1660 | 0,1853 | $157^1/_2{}^0$ | 0,0156 | 0,1353 | 0,1153 | $q_9 = 0{,}0328$, $q_{19} = 0{,}0111$ |
| $75^0$ | 0,1612 | 1,0050 | 0,1604 | $165^0$ | 0.0088 | 0,1223 | 0,0719 | $q_{10} = 0{,}0298$, $q_{20} = 0{,}0095$ |
| $82^1/_2{}^0$ | 0,1473 | 0,8552 | 0,1722 | $172^1/_2{}^0$ | 0,0050 | 0,1110 | 0,0450 | |
| $90^0$ | 0,1093 | 0,7164 | 0,1526 | $180^0$ | 0 | 0,1060 | 0 | |
| | | | | $360^0 - \vartheta_\lambda$ | $-\mathfrak{f}_\lambda$ | $g_\lambda$ | $-\mathfrak{f}'_\lambda$ | $q_{-k} = -q_k$ |

Der Anteil des Wirbelsystems an der Auftriebsverteilung ist in (65) ausgedrückt. Der Anteil des Geschwindigkeitsfeldes $\mathfrak{u}$ ergibt sich aus (57) mit Benutzung der Zahlenwerte (67). In Zahlentafel 5 sind die berechneten Werte angegeben. Der Unterschied gegenüber dem Fall einer unendlich breiten Tragfläche ist recht gering.

Zahlentafel 5.

Auftriebsverteilung längs des Rumpfes bei $b = 10$.

| $x = \frac{X}{R}$ | $\frac{P_1}{\varrho V \Gamma}$ | $\frac{P_2}{\varrho V \Gamma}$ | $\frac{A'}{\varrho V \Gamma}$ | $x = \frac{X}{R}$ | $\frac{P_1}{\varrho V \Gamma}$ | $\frac{P_2}{\varrho V \Gamma}$ | $\frac{A'}{\varrho V \Gamma}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0,9476 | − 0.2570 | 0,6906 | 3,0 | 0,0473 | 0,0283 | 0,0756 |
| 0,5 | 0,5145 | − 0,1473 | 0,3672 | 3,5 | 0,0352 | 0,0243 | 0,0595 |
| 1.0 | 0.2728 | − 0,0174 | 0,2554 | 4,0 | 0,0270 | 0,0213 | 0,0483 |
| 1,5 | 0.1566 | 0,0172 | 0,1738 | 4.5 | 0,0211 | 0,0175 | 0,0386 |
| 2.0 | 0,0986 | 0,0309 | 0.1295 | 5,0 | 0,0169 | 0,0152 | 0,0321 |
| 2,5 | 0,0665 | 0,0301 | 0,0966 | | | | |

## 9. Auftriebsverteilung längs des Rumpfes bei geringer Tragflächenbreite.

Für kleine Breitenverhältnisse können wir nicht mehr mit derselben Berechtigung wie vorhin eine konstante Zirkulationsverteilung über die Tragfläche annehmen. Wir müßten vielmehr bei gegebenen Abmessungen der Tragfläche zunächst die Zirkulationsverteilung über die Tragfläche errechnen und diese bei der weiteren Berechnung benutzen. Ist die Zirkulationsverteilung $\Gamma(y)$, so gehen von jedem Punkte der tragenden Linie freie Wirbel ab, die nach der Prandtlschen Theorie als parallele Geraden in Richtung der negativen $x$-Achse anzunehmen sind. Die Intensität dieser freien Wirbel auf einem Breitenelement $dy$ ist dann $\Gamma'(y)\,dy$ mit $\Gamma' = \frac{d\Gamma}{dy}$.

Durch Spiegelung der freien Wirbel an der Oberfläche des Rumpfes und entsprechende Verlängerung der tragenden Linie erhalten wir nun wieder eine Strömung, die im Unendlichen unsere Randbedingungen vollständig erfüllt. Durch Ueberlagerung einer anderen Strömung suchen wir dann die Randbedingungen in der Nähe der Tragfläche in derselben Weise zu erfüllen wie vorhin.

Zunächst ist wieder die Geschwindigkeit am Rumpf infolge des Wirbelfeldes zu suchen. Nach dem Biot-Savartschen Gesetz ergibt die tragende Linie eine Geschwindigkeitskomponente in der Längsrichtung des Rumpfes:

$$w_x{}^I = -\frac{1}{4\pi} \sin\vartheta \left[ \int_{-b}^{-1/b} + \int_{1/b}^{b} \frac{\Gamma(\eta)\, d\eta}{(1 + x^2 + \eta^2 - 2\,\eta \cos\vartheta)^{3/2}} \right] \quad . \quad . \quad . \quad (69),$$

sowie eine radial gerichtete Komponente:

$$w_r^{I} = \frac{x}{4\pi}\sin\vartheta\left[\int\limits_{-b}^{-1/b} + \int\limits_{1/b}^{b} \frac{\Gamma(\eta)\,d\eta}{(1+x^2+\eta^2-2\eta\cos\vartheta)^{3/2}}\right] \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (70\,\mathrm{a}).$$

Das Wirbelband, welches aus den freien Wirbeln und den gespiegelten Wirbeln besteht, liefert am Rumpf die radiale Geschwindigkeitskomponente:

$$w_r^{II} = -\frac{x}{4\pi}\sin\vartheta\left[\int\limits_{-b}^{-1/b} + \int\limits_{1/b}^{b} \frac{\eta\,\Gamma'(\eta)\,d\eta}{(1+\eta^2-2\eta\cos\vartheta)\sqrt{1+x^2+\eta^2-2\eta\cos\vartheta}}\right] \quad (70\,\mathrm{b}).$$

Die vom Wirbelband herrührende axiale Komponente verschwindet. Zur Ermittlung der Auftriebsverteilung längs des Rumpfes gehen wir wieder in derselben Weise vor wie vorhin. Wir setzen daher für die Oberfläche des Rumpfes:

$$w_n = x\,(J + \mathfrak{J})\sin\vartheta \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (71\,\mathrm{a})$$

sowie

$$w_x = -J\sin\vartheta \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (71\,\mathrm{b})$$

mit

$$J = \frac{1}{\pi x}\int\limits_0^{2\pi} w_r^{I}\sin\vartheta\,d\vartheta \quad \text{und} \quad \mathfrak{J} = \frac{1}{\pi x}\int\limits_0^{2\pi} w_r^{II}\sin\vartheta\,d\vartheta.$$

Wir bemerken, daß $w_x$ wieder eine gerade Funktion und $w_r$ eine ungerade Funktion von $x$ ist.

In den Ausdrücken für $J$ und $\mathfrak{J}$ führen wir die Integration nach $\vartheta$ aus. Wir erhalten

$$J = \frac{1}{4\pi^2}\int\limits_0^{2\pi} d\vartheta \int\limits_{1/b}^{b} \sin^2\vartheta\cdot\Gamma(\eta)\left[\frac{1}{(1+x^2+\eta^2-2\eta\cos\vartheta)^{3/2}} + \frac{1}{(1+x^2+\eta^2+2\eta\cos\vartheta)^{3/2}}\right] d\eta$$

Hierin ist $\Gamma(\eta) = \Gamma(-\eta)$ berücksichtigt worden. Nun wird

$$J = \int\limits_{1/b}^{b} \Gamma(\eta)\cdot J_1\,d\eta \qquad \text{mit} \qquad J_1 = \frac{1}{\pi^2}\int\limits_0^{\pi}\frac{\sin^2\vartheta\,d\vartheta}{(1+x^2+\eta^2-2\eta\cos\vartheta)^{3/2}}$$

Dieses Integral ist von elliptischem Typ. Setzen wir nun in üblicher Weise die vollständigen elliptischen Integrale

$$\int\limits_0^{\pi/2}\frac{d\alpha}{\sqrt{1-k^2\sin^2\alpha}} = \mathbf{K}, \qquad \int\limits_0^{\pi/2} d\alpha\sqrt{1-k^2\sin^2\alpha} = \mathbf{E},$$

so ergibt sich

$$J = \frac{1}{\pi^2}\int\limits_{1/b}^{b}\frac{1}{\eta^2}\,\Gamma(\eta)\sqrt{x^2+(1+\eta)^2}\left[\frac{x^2+1+\eta^2}{x^2+(1+\eta)^2}\,\mathbf{K} - \mathbf{E}\right] d\eta \quad . \quad . \quad . \quad (72),$$

wobei der Modul $k$ der elliptischen Integrale aus

$$k^2 = \frac{4\eta}{x^2+(1+\eta)^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (72\,\mathrm{a})$$

folgt. In ähnlicher Weise behandeln wir

$$\mathfrak{J} = -\frac{1}{4\pi^2}\int\limits_0^{2\pi} d\vartheta\int\limits_{1/b}^{b}\eta\,\Gamma'(\eta)\sin^2\vartheta\left[\frac{1}{(1+\eta^2-2\eta\cos\vartheta)\sqrt{1+x^2+\eta^2-2\eta\cos\vartheta}}\right.$$

$$\left.+\frac{1}{(1+\eta^2+2\eta\cos\vartheta)\sqrt{1+x^2+\eta^2+2\eta\cos\vartheta}}\right] d\eta$$

$$= -\frac{1}{\pi^2}\int\limits_0^{\pi} d\vartheta\int\limits_{1/b}^{b}\frac{\eta\,\Gamma'(\eta)\sin^2\vartheta\,d\eta}{(1+\eta^2-2\eta\cos\vartheta)\sqrt{1+x^2+\eta^2-2\eta\cos\vartheta}} = -\int\limits_{1/b}^{b}\eta\,\Gamma'(\eta)\,\mathfrak{J}_1\,d\eta.$$

Hierbei ist bereits berücksichtigt, daß $\Gamma'(\eta) = -\Gamma'(-\eta)$ ist. Mit $\alpha = \vartheta/2$ wird

$$\mathfrak{J}_1 = \frac{8}{\pi^2}\,\frac{1}{(1+\eta)^2\sqrt{x^2+(1+\eta)^2}}\left[\frac{(1+\eta)^2}{4\eta}\int\limits_0^{\pi/2}\frac{\sin^2\alpha\,d\alpha}{\sqrt{1-k^2\sin^2\alpha}} - \frac{(1-\eta)^2}{4\eta}\int\limits_0^{\pi/2}\frac{\sin^2\alpha\,d\alpha}{\left(1-\frac{4\eta}{(1+\eta)^2}\sin^2\alpha\right)\sqrt{1-k^2\sin^2\alpha}}\right]$$

Das erste Integral führt auf vollständige elliptische Integrale erster und zweiter Gattung. Das zweite Integral ist ein vollständiges elliptisches Integral dritter Gattung und läßt sich durch elliptische Integrale erster und zweiter Gattung ausdrücken. Zu diesem Zwecke führen wir den komplimentären Modul $k' = \sqrt{1-k^2}$ ein und setzen den Parameter des elliptischen Integrals dritter Gattung

$$\frac{4\,\eta}{(1+\eta)^2} = 1 - k'^2 \sin^2\beta .$$

Es ist also

$$k'^2 = \frac{x^2 + (1-\eta)^2}{x^2 + (1+\eta)^2} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (73\,\mathrm{a}),$$

$$\sin^2\beta = \frac{(1-\eta)^2}{(1+\eta)^2}\,\frac{x^2 + (1+\eta)^2}{x^2 + (1-\eta)^2} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (73\,\mathrm{b}).$$

Nach Legendre ergibt sich nun

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2\alpha\, d\alpha}{[1-(1-k'^2\sin^2\beta)\sin^2\alpha]\sqrt{1-k^2\sin^2\alpha}}$$

$$= \frac{1}{k'^2 \sin\beta\cos\beta\sqrt{1-k'^2\sin^2\beta}}\left[\pi/2 + \mathbf{K}\,\{F(\beta,k') - E(\beta,k')\} - \mathbf{E}\,F(\beta,k')\right].$$

Hierin sind $F(\beta, k')$ und $E(\beta, k')$ die elliptischen Integrale erster bzw. zweiter Gattung vom Argument $\beta$ zum Modul $k'$. Wir erhalten demnach

$$\mathfrak{J}_1 = \frac{1}{\pi^2}\frac{\sqrt{x^2+(1+\eta)^2}}{\eta^2}\left[\frac{1}{2}(\mathbf{K}-\mathbf{E})\right.$$

$$\left. - \frac{\sqrt{\eta}\,(1-\eta)}{(1+\eta)\,[x^2+(1-\eta)^2]\sin\beta\cos\beta}\left\langle\frac{\pi}{2} + \mathbf{K}\{F(\beta,k') - E(\beta,k')\} - \mathbf{E}\,F(\beta,k')\right\rangle\right].$$

Mithin wird

$$\mathfrak{J} = -\frac{1}{\pi^2}\int_{1/b}^{b}\frac{\Gamma'(\eta)}{\eta}\sqrt{x^2+(1+\eta)^2}\left[\frac{1}{2}(\mathbf{K}-\mathbf{E})\right.$$

$$\left. - \frac{\sqrt{\eta}\,(1-\eta)}{(1+\eta)\,[x^2+(1-\eta)^2]\sin\beta\cos\beta}\left\langle\frac{\pi}{2} + \mathbf{K}\{F(\beta,k') - E(\beta,k')\} - \mathbf{E}\,F(\beta,k')\right\rangle\right]d\eta\,. \quad (73).$$

Die Auswertung der Ausdrücke (72) und (73) kann nun für gegebenes Breitenverhältnis in der Weise geschehen, daß man für Werte $|x| =$ konst mit Benutzung der Tabellen für elliptische Integrale die Integranden berechnet und die Integration nach einem numerischen oder graphischen Verfahren durchführt. Dabei ergeben sich noch folgende Schwierigkeiten: Für $\eta = b$ und $\eta = 1/b$ wird $\Gamma'(\eta) = \pm\infty$. Diese Schwierigkeit läßt sich dadurch beheben, daß man in der Nähe von $\eta = b$ und $\eta = 1/b$ einen endlichen Mittelwert von $\Gamma'(\eta)$ in die Berechnung einsetzt, indem man die freien Wirbel in den endlichen Intervallen $1/b \leq \eta \leq 1/b + \Delta$ und $b - \Delta \leq \eta \leq b$ gleichmäßig verteilt annimmt. Eine weitere Schwierigkeit besteht darin, daß für $x = 0$ und $\eta = 1$ der Modul der elliptischen Integrale $k = 1$ und mithin $\mathbf{K} = \infty$ wird. Hier helfen wir uns in der Weise, daß wir die Integration ausführen bis auf einen schmalen Streifen, der die singuläre Stelle enthält. In diesem Streifen können wir nun, falls er genügend schmal ist, $\Gamma(\eta) = \Gamma_1 =$ konst setzen und es ist dann:

$$\mathbf{K} = \ln\frac{4}{K'} + \ldots = \ln\frac{4\,(1+\eta)}{(1-\eta)} + \ldots$$

Ist die Breite des Streifens $2\,\varepsilon$, so ergibt sich unter Vernachlässigung der kleinen Glieder im Integranden:

$$J = -\frac{\Gamma_1}{\pi^2}\int_{1-\varepsilon}^{1+\varepsilon}\frac{1+\eta^2}{\eta^2(1+\eta)}\ln(1-\eta)\,d\eta .$$

Diesen Ausdruck können wir durch partielle Integration auswerten und erhalten:

$$\int_{1-\varepsilon}^{1+\varepsilon}\frac{1+\eta^2}{\eta^2(1+\eta)}\ln(1-\eta)\,d\eta = \frac{1+\eta^2}{\eta\,(1+\eta)}\left[\frac{1}{2}(\ln\eta)^2 + \frac{1}{\eta} + \frac{1}{4\,\eta^2} + \ldots\right]_{1-\varepsilon}^{1+\varepsilon}$$

$$-\int_{1-\varepsilon}^{1+\varepsilon}\frac{2\,\eta^2(1+\eta) - (1+2\,\eta)(1+\eta^2)}{\eta^2(1+\eta)^2}\left[\frac{1}{2}(\ln\eta)^2 + \frac{1}{\eta} + \frac{1}{4\,\eta^2} + \ldots\right]d\eta .$$

Hieraus ersieht man, daß

$$\lim_{\varepsilon=0} \int_{1-\varepsilon}^{1+\varepsilon} \frac{1+\eta^2}{\eta^2(1+\eta)} \ln(1-\eta)\, d\eta = 0$$

wird, daß also der Beitrag des Streifens vernachlässigt werden kann, wenn $\varepsilon$ sehr klein ist.

Wir führen nun die Berechnung durch für den Fall, daß die Zirkulationsverteilung über die Tragfläche dieselbe ist, die wir aus der Bedingung kleinsten Widerstandes bei gegebenem Auftrieb hergeleitet haben; ferner legen wir das Breitenverhältnis $b = 2$ unserer Berechnung zugrunde. Bezeichnet $\Gamma_1$ den Wert der Zirkulation an der Stelle, wo die Tragfläche am Rumpf angeschlossen ist, so wird nach (40)

$$\Gamma(y) = \Gamma_1 \frac{b^2+1}{b^2-1} \sqrt{1 - \frac{b^2}{(b^2+1)^2} \frac{(y^2+1)^2}{y^2}}.$$

Hierin ist $\Gamma(y) = \Gamma(1/y)$, und der Ausdruck (74a) ist über die gesamte tragende Linie $1/b \leqq |y| \leqq b$ gültig. Es wird dann

$$\Gamma'(y) = -\Gamma_1 \frac{b^2}{(b^2-1)(b^2+1)} \frac{(y^2-1)(y^2+1)}{y^3 \sqrt{1 - \frac{b^2}{(b^2+1)^2} \frac{(y^2+1)^2}{y^2}}}.$$

Wir bestimmen nun für $x = 0;\ 0{,}5;\ 1$ usw. die Werte $J$ und $\mathfrak{J}$ nach (72) und (73), indem wir den Bereich $1/b \leqq \eta \leqq b$ in Intervalle einteilen, an den Grenzen der Intervalle die Integranden berechnen und die Integration nach der Simpsonschen Regel ausführen. An den singulären Stellen der Integranden gehen wir in der vorhin angegebenen Weise vor.

Wir schreiben nun in derselben Form wie oben:

$$w_n = x\,(J + \mathfrak{J}) \sin\vartheta = \frac{\Gamma_1}{\pi}\, \mathfrak{f}_1(x) \sin\vartheta \quad \ldots\ldots \quad (75).$$

Ueberlagern wir wieder eine Strömung, die durch einen Doppelquellfaden längs der $x$-Achse erzeugt wird, so ergibt sich aus der Randbedingung für die Intensität des Doppelquellfadens die Integralgleichung (59). In derselben Weise wie vorhin bei $b = 10$ teilen wir den Integrationsbereich in Intervalle von der Länge 0,5 und nehmen in den einzelnen Intervallen eine konstante Verteilung der unbekannten Quellmomente an. Dadurch geht die Integralgleichung (59) in ein System linearer Gleichungen über, wobei die Koeffizienten $a_n$ der Unbekannten $q_k$ dieselben sind, die aus (66) berechnet sind. Der Unterschied unseres jetzigen Gleichungssystems gegenüber dem früheren besteht als nur in anderen Absolutgliedern $b_n$, die sich durch die Beziehung (75) aus den Werten $J$ und $\mathfrak{J}$ ergeben. Es wird:

$$b_0 = 0 \quad b_1 = 0{,}0925, \quad b_2 = 0{,}0664, \quad b_3 = 0{,}0532, \quad b_4 = 0{,}0361, \quad b_5 = 0{,}0251,$$
$$b_6 = 0{,}0193, \quad b_7 = 0{,}0169, \quad b_8 = 0{,}0106, \quad b_9 = 0{,}0078, \quad b_{10} = 0{,}0060, \quad b_{11} = 0{,}0058,$$
$$b_{-n} = -b_n.$$

Wir wenden wieder dieselbe Lösungsmethode an wie vorhin bei $b = 10$ und erhalten die Werte $q_k$ aus (68a) und (68b). Die Ergebnisse sind in Zahlentafel 6 angegeben. Aus

Zahlentafel 6.

| $\vartheta_\lambda$ | $\mathfrak{f}_\lambda$ | $g_\lambda$ | $\mathfrak{f}'_\lambda = \frac{f_\lambda}{g_\lambda}$ | $\vartheta_\lambda$ | $\mathfrak{f}_\lambda$ | $g_\lambda$ | $\mathfrak{f}'_\lambda = \frac{f_\lambda}{g_\lambda}$ | $q_k$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $0^0$ | 0 | 2.0236 | 0 | | | | | $q_0 = 0$ |
| $15^0$ | 0,2050 | 2,1099 | 0,0972 | $105^0$ | 0,0476 | 0,4996 | 0,0952 | $q_1 = 0{,}1171$ |
| $30^0$ | 0,1673 | 2,0056 | 0,0834 | $120^0$ | 0,0378 | 0,3367 | 0,1122 | $q_2 = -0{,}0227$ |
| $45^0$ | 0,1360 | 1,7074 | 0,0797 | $135^0$ | 0,0298 | 0,2306 | 0,1290 | $q_3 = 0{,}0517$ |
| $60^0$ | 0,0982 | 1,3441 | 0,0731 | $150^0$ | 0.0185 | 0,1468 | 0.1267 | $q_4 = 0{,}0005$ |
| $75^0$ | 0,0778 | 1,0050 | 0.0774 | $165^0$ | 0.0132 | 0.1223 | 0,1082 | $q_5 = 0{,}0181$ |
| $90^0$ | 0,0495 | 0,7164 | 0,0691 | $180^0$ | 0 | 0,1060 | 0 | $q_6 = 0{,}0034$ |
| | | | | | | | | $q_7 = 0{,}0138$ |
| | | | | | | | | $q_8 = 0{,}0016$ |
| | | | | $360^0 - \vartheta_\lambda$ | $-\mathfrak{f}_\lambda$ | $g_\lambda$ | $-\mathfrak{f}'_\lambda$ | $q_9 = 0{,}0052$ |
| | | | | | | | | $q_{10} = 0{,}0012$ |
| | | | | | | | | $q_{-k} = -q_k$ |

den gefundenen Werten und den Zahlenwerten (67) ergibt sich der Anteil $P_2(x)$ an der Auftriebsverteilung längs des Rumpfes mit Hilfe von (57). Der Anteil des Wirbelsystems ist mit Berücksichtigung von (13a) und (71):

$$P_1(x) = -\varrho V J \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (76).$$

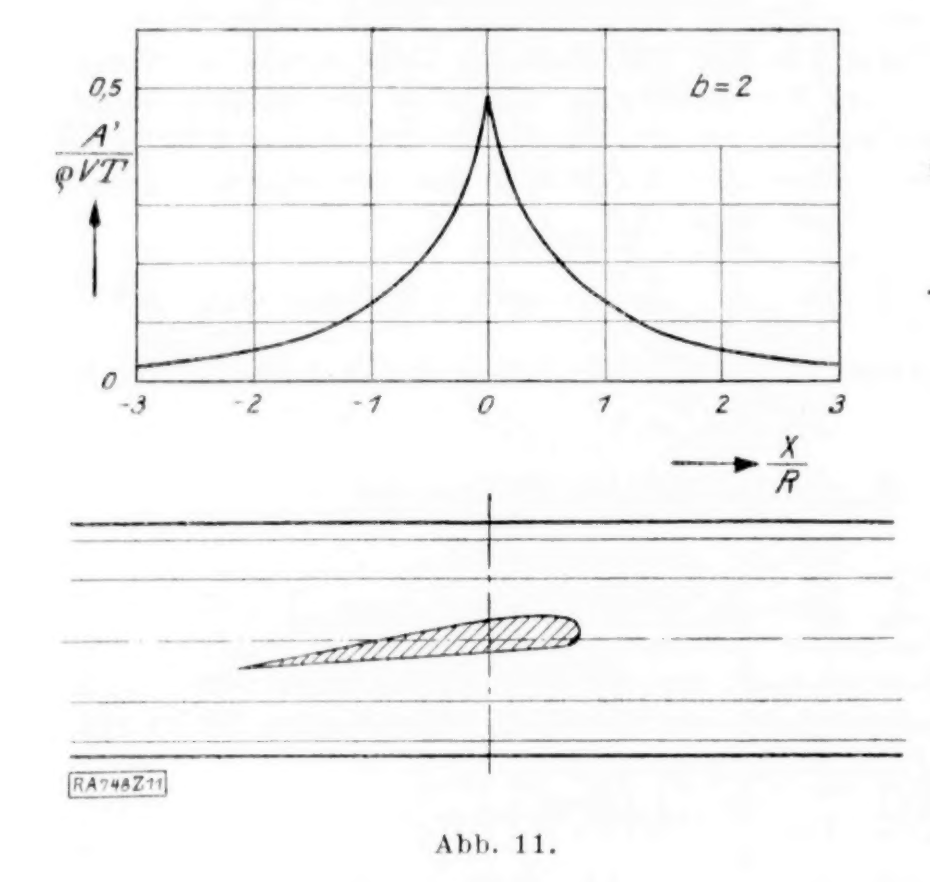



Abb. 11.

Zahlentafel 7.
Auftriebsverteilung längs des Rumpfes bei $b = 2$.

| $x = \frac{X}{R}$ | $\frac{P_1}{\varrho V \Gamma_1}$ | $\frac{P_2}{\varrho V \Gamma_1}$ | $\frac{A'}{\varrho V \Gamma_1}$ |
|---|---|---|---|
| 0 | 0,5806 | − 0,0954 | 0,4852 |
| 0,5 | 0,2589 | − 0,0380 | 0,2209 |
| 1,0 | 0,1233 | 0,0089 | 0,1322 |
| 1,5 | 0,0666 | 0,0091 | 0,0757 |
| 2,0 | 0,0383 | 0,0154 | 0,0537 |
| 2,5 | 0,0232 | 0,0104 | 0,0336 |
| 3,0 | 0,0148 | 0,0079 | 0,0227 |

Die Ausrechnung ergibt Zahlentafel 7. In Abb. 11 ist die Auftriebsverteilung $\frac{A'}{\varrho V \Gamma_1}$ für das Breitenverhältnis 2 dargestellt.

748

# Die Stabilität eines elastisch gebetteten Druckstabes.

Von **ERNST CHWALLA** in Wien.

Die vorliegende Abhandlung befaßt sich mit der Ermittlung und Untersuchung der Stabilitätsgrenze eines axial und zentrisch gedrückten Stabes, dessen Querstützung einzig durch die Einbettung in ein Mittel erfolgt, das allen Verformungen der ursprünglich geraden Stabachse einen Widerstand entgegensetzt, der verhältnisgleich ist den Abweichungen der Achspunkte von ihrer ursprünglichen Lage. Hr. H. Zimmermann hat dieses, insbesonders wegen seiner Nutzungsmöglichkeit bei der Druckgurtberechnung offener Brücken wichtige Problem im Jahre 1905 in den Sitzungsberichten der kgl. preuß. Akademie der Wissenschaften behandelt und die gefundene Knickbedingung in einer später erschienenen eigenen Abhandlung[1]) eingehendst untersucht und der Praxis zugänglich gemacht. Zimmermann fordert jedoch in seiner Herleitung der allgemeinen Knickbedingung für die Integrationskonstanten Randbedingungen, die einer allgemeinen Erfassung des Problems hinderlich sind und in ihrer Auswirkung zu Trugschlüssen Anlaß geben; es werden in genannter Arbeit an der Stabilitätsgrenze ausschließlich Gleichgewichtslagen zugelassen, die Symmetrie bezüglich der Ordinatenachse (Stabmitte) aufweisen, so daß alle unsymmetrischen Formen des Gleichgewichts in der allgemeinen Knickbedingung nicht vertreten sind. Nun sind es aber, wie sich zeigen wird, gerade die unsymmetrischen Gleichgewichtslagen, die nicht nur im gesamten Wertbereich der Bettungswiderstände abwechselnd mit den symmetrischen Formen den kleinsten, also maßgebenden Knicklasten entsprechen, sondern auch im Bereiche der verschwindend kleinen Bettungswiderstände die maßgebenden Wurzeln liefern; sie sind es auch, die dann im Grenzfall des vollständig frei schwebenden Druckstabes die Stabilitätsgrenze, wie es sein muß, auf »$P = O$« hinunterdrücken und nicht, wie es Zimmermanns symmetrische Formen nur vermögen, bloß bis zur Eulerlast. Diese Unvollständigkeit der vorhandenen Problemerfassung möge die im folgenden durchgeführte neue Herleitung ebenso rechtfertigen wie das Streben nach einem durchsichtigeren, die Zusammenhänge klarer aufzeigenden Lösungsgang als

[1]) Zimmermann, Die Knickfestigkeit eines Stabes mit elastischer Querstützung. Berlin 1906.

qualitativ hochwertige Näherungslösung für die von **Zimmermann** gegebene strenge Behandlung des Druckstabes im Falle gleichartiger, punktweiser Querstützung [1]).

**1. Aufstellung der Differentialgleichung.** Ein elastischer Stab von der Länge »$L = 2\,l$« und der Steifigkeit »$E\,J$« sei in der dieser Steifigkeit zugeordneten Ebene durch eine über die ganze Stablänge erstreckte elastische Bettung quergestützt; diese Bettung sei durch den Zusammenhang $\mathfrak{w} = \frac{W}{a} \cdot y$ gekennzeichnet, wobei »$\mathfrak{w}$« den Widerstand der Bettung gegen die Verschiebung »$y$« vorstellt und die Bettungsziffer »$W/a$« in dieser Schreibweise auf die Aufteilung konzentrierter Rahmenwiderstände »$W$« auf die Feldlänge »$a$« bei brückenbaulicher Anwendung hinweisen möge. Der Grundgedanke, statisch unbestimmte Wirkungsgrößen aus Haupt- und Hilfsbelastungen eines statisch bestimmt gemachten Grundsystems abzuleiten, führt hier zu einer gedachten Loslösung des Stabes von den ihm unmittelbar benachbarten Elementen der Bettung (der »Bettungslinie«) und verlangt damit, die bei einer Verformung des gegebenen quergestützten Stabes auftretende Wechselwirkung $p_x = f(x)$ in ihrer jedenfalls stetigen Verteilung nun als überzählige Außenlast aufzufassen. Das gegebene System ist demnach aufgespalten in den vollkommen frei schwebenden, durch die Axialkraft »$P$« zentrisch gedrückten und durch die stetige, statisch unbestimmte Einwirkung »$p_x$« querbelasteten Stab und die unter der längs der Bettungslinie verteilten Gegenwirkung »$p_x$« stehende Bettung. Weist man dem Ursprung des Koordinatenkreuzes die Stabmitte zu, legt die Abszisse durch das rechte Stabende (vergl. Abb. 1) und richtet die Ordinatenachse nach unten, so fordert das Gleichgewicht am schwebenden Stab bei

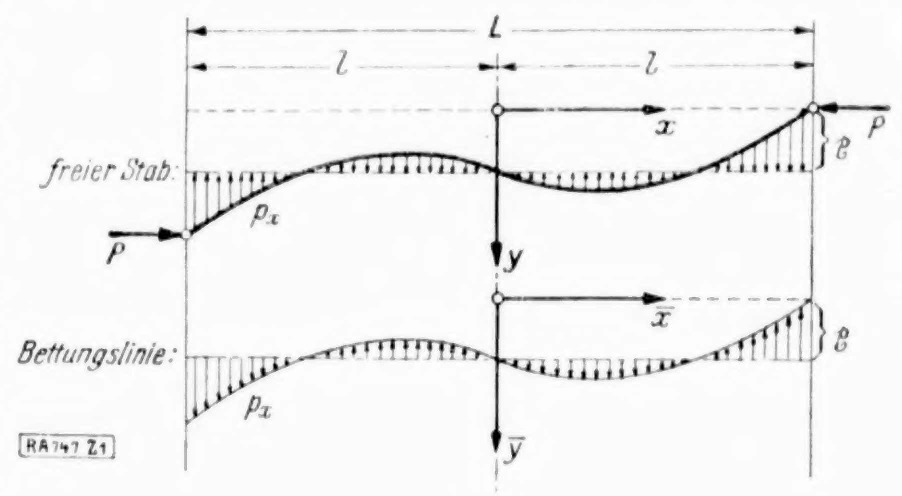



Abb. 1.

Zuziehung der üblichen Annäherung »$y'' = -\frac{M}{E\,J}$« die Erfüllung von

$$y'''' = -\frac{P}{E\,J} \cdot y'' + \frac{1}{E\,J} \cdot p_x\,,$$

während anderseits die unter dem Einfluß der »$p_x = f(x)$« stehende Bettungslinie eine Gleichgewichtslage annimmt, die mit Beziehung auf ein analoges Koordinatenkreuz $\bar{x}$, $\bar{y}$ der Gleichung

$$W/a \cdot \bar{y} = \mathfrak{p} - p_x .$$

Genüge leisten muß, wobei »$\mathfrak{p}$« den Wert von »$p_x$« an der Stelle $x = +l$ vorstellen soll; die besondere Bedeutung des »$p_x$« als überzählige Wirkungsgröße des gegebenen, quergestützten Stabes verlangt nun die Identität $y \equiv \bar{y}$ und führt damit zur Gleichgewichtsbedingung

$$y'''' + \frac{P}{E\,J} \cdot y'' + \frac{W}{a\,E\,J} \cdot y - \frac{1}{E\,J} \cdot \mathfrak{p} = 0\,,$$

die nur mehr das wegen der Unbestimmtheit der Stabverschiebung senkrecht zur Stabachse unbestimmte, jedoch von »$x$« unabhängige »$\mathfrak{p}$« enthält. Die Integrationskonstanten sind durch die vier Randbedingungen bestimmt, die in allgemeiner Fassung für die beiden Stabenden Freiheit von Moment und Querkraft verlangen; diese Bedingungen fordern einerseits das Verschwinden der zweiten Ableitung von »$y$« an den Stabenden, anderseits die Erfüllung von

$$\left\{\begin{aligned} &{}^1/_2 \cdot \int_L p_x \cdot d\,x - 1/L \cdot \int_L p_x \cdot x \cdot d\,x + P/L \cdot y_{x=-l} = 0 \\ &{}^1/_2 \cdot \int_L p_x \cdot d\,x + 1/L \cdot \int_L p_x \cdot x \cdot d\,x - P/L \cdot y_{x=-l} = 0 \end{aligned}\right.$$

[1]) Sonderfall der Abhandlung in den Sitzungsberichten der kgl. preuß. Akad. d. Wissenschaften 1907.

oder einfacher das Bestehen des Gleichgewichts gegen Verschiebung und Verdrehung in der Form

$$\int_{-l}^{+l} p_x \cdot d\,x = 0\,, \qquad \int_{-l}^{+l} p_x \cdot x \cdot d\,x - P \cdot y_{x=-l} = 0.$$

Das allgemeine Integral obiger Differentialgleichung lautet

$$y = A_1 \cdot e^{+\alpha x} + A_2 \cdot e^{-\alpha x} + A_3 \cdot e^{+\beta x} + A_4 \cdot e^{-\beta x} + a/W \cdot \mathfrak{p}\,,$$

wobei unter »$\alpha$« und »$\beta$« die Wurzeln der »charakteristischen« Gleichung

$$\alpha^4 + \frac{P}{E\,J} \cdot \alpha^2 + \frac{W}{a\,E\,J} = 0\,, \qquad \text{also} \qquad \left.\begin{matrix}\alpha\\ \beta\end{matrix}\right\} = i\sqrt{\frac{P}{2\,E\,J} \mp \sqrt{\left(\frac{P}{2\,E\,J}\right)^2 - \frac{W}{a\,E\,J}}}$$

verstanden sind; damit wird

$$p_x = \mathfrak{p} - W/a \cdot y = -\,W/a \cdot (A_1\, e^{+\alpha x} + A_2\, e^{-\alpha x} + A_3\, e^{+\beta x} + A_4\, e^{-\beta x})$$

$$\mathfrak{p} = -\,W/a \cdot (A_1 \cdot e^{+\alpha l} + A_2 \cdot e^{-\alpha l} + A_3 \cdot e^{+\beta l} + A_4 \cdot e^{-\beta l})$$

$$y_{x=-l} = (A_2 - A_1) \cdot (e^{+\alpha l} - e^{-\alpha l}) + (A_4 - A_3) \cdot (e^{+\beta l} - e^{-\beta l})$$

und nehmen nach Einführung der Hilfsgrößen

$$\varrho = e^{+\alpha l} \quad \text{und} \quad \sigma = e^{+\beta l}$$

die vier Bestimmungsgleichungen für die Integrationskonstanten die Form an:

$$\left\{\begin{aligned}
&x = +\,l \ldots y'' = A_1\, \alpha^2\, \varrho + A_2\, \alpha^2\, 1/\varrho + A_3\, \beta^2\, \sigma + A_4\, \beta^2\, 1/\sigma = 0\\
&x = -\,l \ldots y'' = A_1\, \alpha^2\, 1/\varrho + A_2\, \alpha_2\, \varrho + A_3\, \beta^2\, 1/\sigma + A_4\, \beta^2\, \sigma = 0\\
&\int_{-l}^{+l} p_x\, d\,x = -\,W/a\,[A_1\, 1/\alpha\,(\varrho - 1/\varrho) + A_2\, 1/\alpha\,(\varrho - 1/\varrho) + A_3\, 1/\beta\,(\sigma - 1/\sigma)\\
&\qquad\qquad\qquad + A_4\, 1/\beta\,(\sigma - 1/\sigma)] = 0\\
&\int_{-l}^{+l} p_x\, x\, d\,x - P \cdot y_{x=-l} = -\,W/a\,\{A_1\,[l/\alpha\,(\varrho + 1/\varrho) - (1/\alpha^2 + P \cdot a/W) \cdot (\varrho - 1/\varrho)]\\
&\qquad - A_2\,[\cdot/\cdot] + A_3\,[l/\beta\,(\sigma + 1/\sigma) - (1/\beta^2 + P \cdot a/W)\,(\sigma - 1/\sigma)] - A_4\,[:/:]\} = 0.
\end{aligned}\right.$$

**2. Das instabile Gleichgewicht.** Die Knickbedingung verlangt nun das Verschwinden der Nennerdeterminante »$\varDelta_N$« obiger Gruppe homogener Gleichungen, da nur diesfalls eine von der geraden Ausgangsform verschiedene Biegelinie $y = F(x)$ möglich wird; sie lautet somit allgemein

$$\varDelta_N = \begin{vmatrix}
\alpha^2 \cdot \varrho & \alpha^2 \cdot \frac{1}{\varrho} & \beta^2 \cdot \sigma & \beta^2 \cdot \frac{1}{\sigma}\\
\alpha^2 \cdot \frac{1}{\varrho} & \alpha^2 \cdot \varrho & \beta^2 \cdot \frac{1}{\sigma} & \beta^2 \cdot \sigma\\
\frac{1}{\alpha} \cdot \left(\varrho - \frac{1}{\varrho}\right) & \frac{1}{\alpha} \cdot \left(\varrho - \frac{1}{\varrho}\right) & \frac{1}{\beta} \cdot \left(\sigma - \frac{1}{\sigma}\right) & \frac{1}{\beta} \cdot \left(\sigma - \frac{1}{\sigma}\right)\\
+\left[\frac{l}{\alpha}\left(\varrho + \frac{1}{\varrho}\right) - \left(\frac{1}{\alpha^2} + \frac{P \cdot a}{W}\right)\left(\varrho - \frac{1}{\varrho}\right)\right] & -[\cdot/\cdot] & +\left[\frac{l}{\beta}\left(\sigma + \frac{1}{\sigma}\right) - \left(\frac{1}{\beta^2} + \frac{P \cdot a}{W}\right)\left(\sigma - \frac{1}{\sigma}\right)\right] & -[:/:]
\end{vmatrix} = 0.$$

Führt man die Hilfsgrößen

$$\lambda_1 = \frac{1}{\alpha} \cdot \left(\varrho - \frac{1}{\varrho}\right), \qquad \mu_1 = \frac{1}{\beta} \cdot \left(\sigma - \frac{1}{\sigma}\right), \qquad \gamma_1 = \alpha^2 \cdot \left(\varrho - \frac{1}{\varrho}\right),$$

$$\lambda_2 = \alpha^2 \cdot \left(\varrho + \frac{1}{\varrho}\right), \qquad \mu_2 = \beta^2 \cdot \left(\sigma + \frac{1}{\sigma}\right), \qquad \gamma_2 = \left[\frac{l}{\alpha}\left(\varrho + \frac{1}{\varrho}\right) - \left(\frac{1}{\alpha^2} + \frac{P \cdot a}{W}\right)\left(\varrho - \frac{1}{\varrho}\right)\right],$$

$$\delta_1 = \beta^2 \cdot \left(\sigma - \frac{1}{\sigma}\right), \qquad \delta_2 = \left[\frac{l}{\beta}\left(\sigma + \frac{1}{\sigma}\right) - \left(\frac{1}{\beta^2} + \frac{P \cdot a}{W}\right)\left(\sigma - \frac{1}{\sigma}\right)\right]$$

ein, so erhält man nach naheliegenden Vereinfachungen

$$\varDelta_N = \begin{vmatrix}
0 & \gamma_1 & 0 & \delta_1\\
\lambda_2 & {}^1/_2\,(\lambda_2 + \gamma_1) & \mu_2 & {}^1/_2\,(\mu_2 + \delta_1)\\
2\,\lambda_1 & \lambda_1 & 2\,\mu_1 & \mu_1\\
0 & \gamma_2 & 0 & \delta_2
\end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix}
0 & \gamma_1 & 0 & \delta_1\\
\lambda_2 & 0 & \mu_2 & 0\\
\lambda_1 & 0 & \mu_1 & 0\\
0 & \gamma_2 & 0 & \delta_2
\end{vmatrix} = 2 \cdot (\lambda_2\, \mu_1 - \lambda_1\, \mu_2) \cdot (\delta_1 \cdot \gamma_2 - \delta_2\, \gamma_1) = 0\,;$$

die Nennerdeterminante verschwindet also, wenn entweder

$$(\lambda_2 \mu_1 - \lambda_1 \mu_2) = \frac{\alpha^2}{\beta}\left(\sigma - \frac{1}{\sigma}\right)\left(\varrho + \frac{1}{\varrho}\right) - \frac{\beta^2}{\alpha}\left(\varrho - \frac{1}{\varrho}\right)\left(\sigma + \frac{1}{\sigma}\right) =$$

$$= \frac{4}{\alpha\beta} \cdot (\alpha^3 \cdot \mathfrak{Cos}\,\alpha l \cdot \mathfrak{Sin}\,\beta l - \beta^3 \cdot \mathfrak{Cos}\,\beta l \cdot \mathfrak{Sin}\,\alpha l) = 0 \quad . \quad (\mathrm{I})$$

oder

$$(\delta_1 \gamma_2 - \delta_2 \gamma_1) =$$

$$= \beta^2 \cdot \left(\sigma - \frac{1}{\sigma}\right)\left[\frac{l}{\alpha}\left(\varrho + \frac{1}{\varrho}\right) - \left(\frac{1}{\alpha^2} + \frac{P_a}{W}\right)\left(\varrho - \frac{1}{\varrho}\right)\right] - \alpha^2 \cdot \left(\varrho - \frac{1}{\varrho}\right)\left[\frac{l}{\beta}\left(\sigma + \frac{1}{\sigma}\right) - \left(\frac{1}{\beta^2} + \frac{P_a}{W}\right)\left(\sigma - \frac{1}{\sigma}\right)\right]$$

$$= \frac{4}{\alpha\beta} \cdot \left\{(\alpha^2 - \beta^2) \cdot \alpha \cdot \beta \cdot \frac{P_a}{W} \cdot \mathfrak{Sin}\,\alpha l \cdot \mathfrak{Sin}\,\beta l - \alpha^3 \cdot l \cdot \mathfrak{Sin}\,\alpha l \cdot \left(\mathfrak{Cos}\,\beta l - \frac{\mathfrak{Sin}\,\beta l}{\beta l}\right) + \right.$$

$$\left. + \beta^3 \cdot l\,\mathfrak{Sin}\,\beta l \cdot \left(\mathfrak{Cos}\,\alpha l - \frac{\mathfrak{Sin}\,\alpha l}{\alpha l}\right)\right\} = 0 \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (\mathrm{II})$$

besteht, wobei noch zu bemerken ist, daß »$\frac{4}{\alpha\beta}$« allgemein nicht Null werden kann, da mit

$$\left.\begin{matrix}\alpha\\ \beta\end{matrix}\right\} = i\sqrt{\left(\frac{P}{2\,EJ}\right) \mp \sqrt{\left(\frac{P}{2\,EJ}\right)^2 - \frac{W}{a\,EJ}}}, \quad \frac{4}{\alpha\beta} = -4\sqrt{\frac{a\,EJ}{W}} \neq 0$$

ist. Die Knickbedingung zerfällt demnach in die beiden Bedingungsgleichungen (I) und (II), denen offenbar auch zwei grundsätzlich verschiedene Gleichgewichtsformen des instabilen Zustandes zugeordnet sind; nun können alle in Betracht kommenden, der Ordinatengröße nach unbestimmten und bloß die Form als solche kennzeichnenden Biegelinien des Knickzustandes zwei Gruppen A und B eingereiht werden, die sich durch bestehende oder fehlende Symmetrie bezüglich der Ordinatenachse auszeichnen.

Gruppe A. Die Symmetrie bezüglich der Ordinatenachse fordert wegen der damit verknüpften Eigenschaft, an Stellen entgegengesetzt gleicher Abszissenwerte entgegengesetzt gleich geneigte Tangenten aufzuweisen, für die Gleichgewichtslagen einen funktionalen Zusammenhang von der Form

$$y = \mathfrak{A} \cdot (\mathfrak{Cos}\,\alpha x - \mathfrak{Cos}\,\alpha l) + \mathfrak{B} \cdot (\mathfrak{Cos}\,\beta x - \mathfrak{Cos}\,\beta l),$$

der, wie schon das notwendige Verschwinden der Endordinate »$y_{x=-l}$« (vergl. 1. Abschnitt) andeutet, aus der allgemeinen Gleichung der Biegelinie

$$y = A_1 \cdot (e^{+\alpha x} - e^{+\alpha l}) + A_2 \cdot (e^{-\alpha x} - e^{-\alpha l}) + A_3 \cdot (e^{+\beta x} - e^{+\beta l}) + A_4 \cdot (e^{-\beta x} - e^{-\beta l})$$

durch Festlegung der Beziehungen

$$A_1 = A_2 = \mathfrak{A}, \qquad A_3 = A_4 = \mathfrak{B}$$

gewonnen werden kann. Diese notwendige paarweise Uebereinstimmung der Integrationskonstanten gibt nun den Randbedingungen der Differentialgleichung (vergl. 1. Abschnitt) die einfache Form

$$\left\{\begin{matrix} 1/\alpha\,(\varrho - 1/\varrho) \cdot \mathfrak{A} + 1/\beta\,(\sigma - 1/\sigma) \cdot \mathfrak{B} = 0 \\ \alpha^2 \cdot (\varrho + 1/\varrho) \cdot \mathfrak{A} + \beta^2\,(\sigma + 1/\sigma) \cdot \mathfrak{B} = 0 \end{matrix}\right.$$

mit der Nennerdeterminante

$$\Delta_A = -\frac{4}{a\beta} \cdot (\alpha^3 \cdot \mathfrak{Cos}\,\alpha l \cdot \mathfrak{Sin}\,\beta l - \beta^3 \cdot \mathfrak{Cos}\,\beta l \cdot \mathfrak{Sin}\,\alpha l),$$

die, wie man erkennt, mit der linken Seite der Knickbedingung (I) identisch ist; die Bedingung (I) muß daher dieser, sämtliche symmetrischen Gleichgewichtslagen umfassenden Gruppe A zugeordnet sein.

Gruppe B. Die Asymmetrie zur Ordinatenachse erscheint hier ersetzt durch die bestehende Symmetrie bezüglich des Koordinatenursprungs; sie bedingt Gleichgewichtsformen von gerader Halbwellenzahl sowie der Eigenschaft, übereinstimmende Tangentenneigung an Stellen entgegengesetzt gleicher Abszissenwerte aufzuweisen. Derartige Gleichgewichtslagen verlangen eine analytische Fassung von der Form

$$y = \mathfrak{A}_1\,(\mathfrak{Sin}\,\alpha x - \mathfrak{Sin}\,\alpha l) + \mathfrak{B}_1\,(\mathfrak{Sin}\,\beta x - \mathfrak{Sin}\,\beta l),$$

die aus der allgemeinen Gleichung der Biegelinie durch Festsetzung der Beziehungen

$$A_1 = -A_2 = -\mathfrak{A}_1, \qquad A_3 = -A_4 = -\mathfrak{B}_1$$

abgeleitet werden kann. Die Randbedingungen der Differentialgleichung vereinfachen sich mit Einführung dieser Größen zu

$$\begin{cases} \alpha^2 \cdot (\varrho - 1/\varrho) \cdot \mathfrak{A}_1 + \beta^2 (\sigma - 1/\sigma) \cdot \mathfrak{B}_1 = 0 \\ [l/\alpha (\varrho + 1/\varrho) - \left(1/\alpha^2 + \frac{P \cdot a}{W}\right)(\varrho - 1/\varrho)] \cdot \mathfrak{A}_1 + [l/\beta (\sigma + 1/\sigma) - \\ \qquad - \left(1/\beta^2 + \frac{P \cdot a}{W}\right)(\sigma - 1/\sigma)] \cdot \mathfrak{B}_1 = 0 \end{cases}$$

mit der Nennerdeterminante

$$J_B = -\frac{4}{\alpha \beta} \Big\{ (\alpha^2 - \beta^2)\, \alpha \beta \cdot \frac{P \cdot a}{W} \cdot \mathfrak{Sin}\, \alpha l \cdot \mathfrak{Sin}\, \beta l - \alpha^3 \cdot l \cdot \mathfrak{Sin}\, \alpha l \left(\mathfrak{Cos}\, \beta l - \frac{\mathfrak{Sin}\, \beta l}{\beta l}\right) + \\ + \beta^3 \cdot l \cdot \mathfrak{Sin}\, \beta l \left(\mathfrak{Cos}\, \alpha l - \frac{\mathfrak{Sin}\, \alpha l}{\alpha l}\right) \Big\},$$

deren Nullsetzung die Knickbedingung (II) ergibt, die demnach allen instabilen Gleichgewichtsformen der Gruppe B zugeordnet sein muß. Da andere Befriedigungsmöglichkeiten der Randbedingungsgleichungen nicht in Betracht kommen, ist das Problem mit der Aufstellung der beiden Knickbedingungen (I) und (II) als vollständig erfaßt anzusehen.

**3. Auswertung der Knickbedingungen.** Untersucht man die Stabilität eines elastisch gebetteten, an beiden Enden jedoch gelenkig festgehaltenen Stabes, so findet man für die Knicklast den Ausdruck

$$P_k = \frac{n^2 \pi^2 E J}{L^2} + \frac{W}{a} \cdot \frac{L^2}{n^2 \pi^2} = \text{Min. nach } »n«,$$

den Engesser in seinem Buche »Zusatzkräfte und Nebenspannnngen« angegeben hat. Man kann nachweisen, daß »$n$« mit der Anzahl der Halbwellen der instabilen Gleichgewichtsformen übereinstimmt, somit jedenfalls eine ganze Zahl sein muß; will man auf diese Tatsache keine Rücksicht nehmen und obiges Extrem unbedingt zulassen, so erhält man als gute Annäherung die unter dem Namen »Engesserformel« bekannte Beziehung $P_k = 2 \cdot \sqrt{\frac{W E J}{a}}$, die im weiteren unter der Bezeichnung $P_{\text{Eng.}}$ verwendet werden wird und deren Einführung den Einfluß einer Festhaltung der Stabenden anzudeuten vermag.

Gruppe A, symmetrische Gleichgewichtslagen:

1. $P_k > P_{\text{Eng.}}$; die Einführung der Größen

$$\begin{rcases} \mu_1 = -i\alpha \\ \mu_2 = -i\beta \end{rcases} = \sqrt{\frac{P}{2EJ} \mp \sqrt{\left(\frac{P}{2EJ}\right)^2 - \frac{W}{aEJ}}}$$

weist der Knickbedingung (I) die Form

$$\mu_1^3 \cdot \cos \mu_1 l \cdot \sin \mu_2 l - \mu_2^3 \cdot \cos \mu_2 l \cdot \sin \mu_1 l = 0 \quad \text{zu.}$$

2. $P_k = P_{\text{Eng.}}$; ein notwendiger Grenzübergang ergibt

$$3 \cdot \sin l \sqrt{\frac{2P}{EJ}} - l\sqrt{\frac{2P}{EJ}} = 0 \quad \text{mit der Lösung} \quad P_k = 1{,}2983 \ldots \frac{2EJ}{l^2}.$$

3. $P_k < P_{\text{Eng.}}$; mit Verwendung der Hilfsgrößen $\begin{rcases}\gamma \\ \delta\end{rcases} = \sqrt{\sqrt{\frac{W}{4aEJ}} \pm \frac{P}{4EJ}}$ läßt sich die Knickbedingung (I) umformen zu

$$\delta \cdot \left(\sqrt{\frac{W}{aEJ}} + \frac{P}{EJ}\right) \cdot \sin 2\gamma l + \gamma \cdot \left(\sqrt{\frac{W}{aEJ}} - \frac{P}{EJ}\right) \cdot \mathfrak{Sin}\, 2\delta l = 0.$$

Alle diese drei Sonderformen der Knickbedingung der Gruppe A sind, wie einleitend bemerkt wurde, schon von Zimmermann in dessen erwähnten Arbeiten vom Jahre 1905 und 1906 aufgestellt und ausführlichst ausgewertet worden. Die Vollständigkeit der vorliegenden Abhandlung erfordert im folgenden aber auch die Verwendung von Werten dieser Gruppe und sei hier festgestellt, daß alle dieser Gruppe A zugehörenden Größen aus Zimmermanns nicht zu überbietender Arbeit entlehnt oder abgeleitet sind.

Gruppe B, unsymmetrische Gleichgewichtslagen:

1. $P_k > P_{\text{Eng.}}$; die Verwendung der Hilfsgrößen

$$\begin{rcases} \mu_1 = -i\alpha \\ \mu_2 = -i\beta \end{rcases} = \sqrt{\frac{P}{2EJ} \mp \sqrt{\left(\frac{P}{2EJ}\right)^2 - \frac{W}{aEJ}}}$$

und der erwähnten Beziehung $P_{\text{Eng.}} = 2\sqrt{\frac{W E J}{a}}$ gibt der Knickbedingung (II) die Form

$$\frac{2P}{l \cdot P_{\text{Eng.}}} \cdot (\mu_2^2 - \mu_1^2) \cdot \sin\mu_1 l \cdot \sin\mu_2 l - \mu_1^3 \sin\mu_1 l \left(\cos\mu_2 l - \frac{\sin\mu_2 l}{\mu_2 l}\right)$$
$$+ \mu_2^3 \sin\mu_2 l \left(\cos\mu_1 l - \frac{\sin\mu_1 l}{\mu_1 l}\right) = 0.$$

2. $P_k = P_{\text{Eng.}}$; der notwendige Grenzübergang liefert die Bedingung

$$3 \cdot \sin l \sqrt{\frac{2P}{EJ}} + l\sqrt{\frac{2P}{EJ}} = 0\,,$$

die offenbar durch keine von Null verschiedene Lösung für die Axialkraft »$P$« befriedigt werden kann; es existiert demnach, wie auch zu erwarten ist, keine einer instabilen, unsymmetrischen Gleichgewichtsform zugeordnete Druckkraft, die die Knicklast desselben gebetteten Stabes bei gelenkiger Festhaltung seiner Enden erreicht.

3. $P_k < P_{\text{Eng.}}$; die Zuziehung der Hilfsgrößen $\left.\begin{matrix}\gamma\\ \delta\end{matrix}\right\} = \sqrt{\sqrt{\frac{W}{4aEJ}} \pm \frac{P}{4EJ}}$, deren Zusammenhang mit $\alpha$ und $\beta$ durch die Beziehungen

$$\begin{array}{ll} \alpha = i\mu_1 = i(\gamma + i\delta) & \left.\begin{matrix}\mathfrak{Sin}\,\alpha l \cdot \mathfrak{Sin}\,\beta l\\ \mathfrak{Cos}\,\alpha l \cdot \mathfrak{Cos}\,\beta l\end{matrix}\right\} = \mp \frac{1}{2}(\mathfrak{Cos}\,2\delta l \mp \cos 2\gamma l) \\ \beta = i\mu_2 = i(\gamma - i\delta) & \\ \gamma^2 - \delta^2 = +\frac{P}{2EJ} & \left.\begin{matrix}\mathfrak{Sin}\,\alpha l \cdot \mathfrak{Cos}\,\beta l\\ \mathfrak{Cos}\,\alpha l \cdot \mathfrak{Sin}\,\beta l\end{matrix}\right\} = +\frac{1}{2}(i\sin 2\gamma l \mp \mathfrak{Sin}\,2\delta l) \\ (\alpha^2 - \beta^2) = -4i\gamma\delta & \end{array}$$

zum Ausdruck gebracht wird, gestattet die Umformung der Knickbedingung (II) zu

$$\delta \cdot \left(\sqrt{\frac{W}{aEJ}} + \frac{P}{EJ}\right) \cdot \sin 2\gamma l - \gamma \cdot \left(\sqrt{\frac{W}{aEJ}} - \frac{P}{EJ}\right) \cdot \mathfrak{Sin}\,2\delta l = 0\,,$$

woraus durch die Grenzwertbildung $\delta \to 0$, $\gamma \to \sqrt{\frac{P}{2EJ}}$ wieder die unerfüllbare Sonderform (2) abgeleitet werden kann. Es sei hier noch zwecks Erleichterung des Vergleiches mit dem Stabilitätsproblem des durch Einzelstützen gleichartig elastisch gestützten Druckstabes bemerkt, daß die Kriterien »$P_k \gtreqless P_{\text{Eng.}}$« der drei Sonderfälle gleichbedeutend sind mit dem Resultieren von vier reellen, zwei Doppel- und vier komplexen Wurzeln $\alpha$, $\beta$ der charakteristischen Gleichung der Ausgangsdifferentialgleichung.

Die Tatsache, daß den unsymmetrischen Gleichgewichtslagen maßgebende, das heißt kleinste Knicklasten zugeordnet sind, die durchwegs kleiner sind als die entsprechenden Engesserlasten $2\sqrt{\frac{WEJ}{a}}$, gestattet nun die Folgerung, daß die Knickbedingungen 1 und 2 der Gruppe A) niemals maßgebend werden können, da deren Wurzeln notwendigerweise unterboten werden von denen der Bedingung 3, Gruppe B). Es verbleiben somit als maßgebend überhaupt nur die beiden Knickbedingungen 3 von A) und B), die zusammengefaßt werden können zur Bedingungsgleichung:

$$0 = \delta \cdot \left(\sqrt{\frac{W}{aEJ}} + \frac{P}{EJ}\right) \cdot \sin\gamma L \pm \gamma \cdot \left(\sqrt{\frac{W}{aEJ}} - \frac{P}{EJ}\right) \cdot \mathfrak{Sin}\,\delta L \ldots \left\{\begin{matrix}\text{»+« \ldots symm. Formen,}\\ \text{»−« \ldots unsymm. Formen;}\end{matrix}\right.$$

die Auflösung erfolgt zweckmäßig mit Einführung einer neuen Hilfsgröße »$n$«, die das Verhältnis $n = \frac{P_{\text{Eng.}}}{P_k} > 1$ zum Ausdruck bringt und mit

$$\gamma = \sqrt{\frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{W}{aEJ}} + \frac{P}{2EJ}\right)} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{P}{EJ}}\sqrt{n+1}, \qquad \delta = \sqrt{\frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{W}{aEJ}} - \frac{P}{2EJ}\right)} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{P}{EJ}}\sqrt{n-1}$$

obige Bedingung in der Form

$$(n+2)\sqrt{n-1} \cdot \sin l\sqrt{\frac{P}{EJ}}\sqrt{n+1} \pm (n-2)\sqrt{n+1} \cdot \mathfrak{Sin}\,l\sqrt{\frac{P}{EJ}}\sqrt{n-1} = 0$$

erscheinen läßt, die sich mit Zuhilfenahme der Ausdrücke

$$w = l\sqrt{\frac{P}{EJ}} \cdot \sqrt{n+1} = \sqrt{\frac{2(n+1)}{n}} \cdot l\sqrt[4]{\frac{W}{aEJ}}, \qquad q = \sqrt{\frac{n-1}{n+1}}$$

vereinfacht zu

$$\sin w = \pm \frac{1 - 3q^2}{3 - q^2} \cdot \frac{\mathfrak{Sin}\, w \cdot q}{q} \quad \ldots\ldots \begin{cases} »+« \ldots\ldots \text{symm. Formen} & \text{(I)}, \\ »-« \ldots\ldots \text{unsymm. Formen} & \text{(II)}. \end{cases}$$

Abb. 2 zeigt das Lösungsschema dieses transzendenten Gleichungspaares und gibt auch ein Bild von der Zahl der höheren Wurzeln; man vermag ferner deutlich die bemerkenswerte Tatsache zu erkennen, daß sich für anwachsende Werte »$w$« die Schnittpunkte liefernde »$q$«-Kurve rasch der Grenzlage $q = \frac{1}{\sqrt{3}}$ (Abszissenachse) nähert, der der Grenzwert $n = 2$, also $P_k = \sqrt{\frac{WEJ}{a}}$ entspricht. Die gefundenen kleinsten Wurzeln dieses Gleichungspaares, die die maßgebenden Knicklasten beider Gruppen möglicher Gleichgewichtsformen umfassen und damit die Lösung des gestellten Problems vorstellen, sind im Diagramm der Abb. 3 niedergelegt, das in zweckmäßiger Weise den Zusammenhang

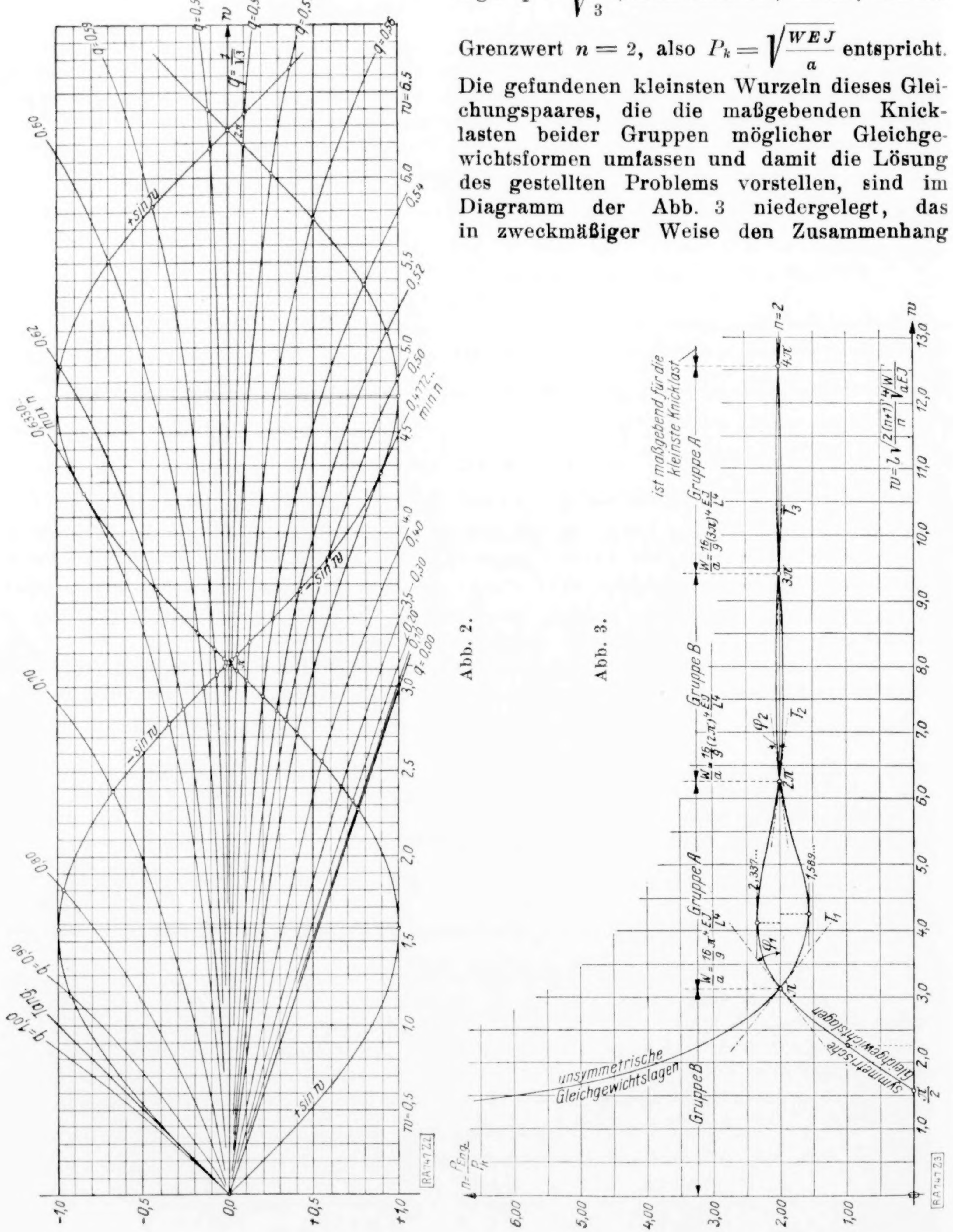


Abb. 2.

Abb. 3.

zwischen den Größen $n = \frac{P_{\text{Eng.}}}{P_k} = \frac{1+q^2}{1-q^2}$ und $w = l\sqrt{\frac{P}{EJ}}\sqrt{n+1} = \sqrt{\frac{2(n+1)}{n}}\, l \cdot \sqrt[4]{\frac{W}{a\,EJ}}$ zur Darstellung bringt [1]). Im Bereich der kleinsten Bettungswiderstände $0 < \frac{W}{a} < \frac{16\,\pi^4}{9} \cdot \frac{EJ}{L^4}$ liefert die Knickbedingung (II) die größten »$n$«-Werte und damit die kleinsten Knicklasten; der durch diese »$n$« gekennzeichnete Einfluß einer Festhaltung der Endpunkte des eingebetteten Stabes wächst für verschwindende »$W/a$« bedeutend an und es wird für $\frac{W}{a} = 0$, $P_k = 0$, $n = \infty$. Die der Knickbedingung (I) entsprechende Diagrammlinie muß wegen der geforderten Symmetrie der zugehörenden Gleichgewichtsformen bei $\frac{W}{a} = 0$ mit der Eulerlast $P = \frac{\pi^2 EJ}{L^2}$, $n = 0$, $w = \frac{\pi}{2}$ [Sonderform 1 der Gruppe A, $\mu_1 \to 0$] beginnen, erreicht bei $w = 2{,}2788\ \ldots$ den Wert $n = 1$ (Sonderfall 2 der Gruppe A) und schneidet bei $w = \pi$ die Diagrammlinie der Knickbedingung (II), um nun, bei $w > \pi$, für die kleinsten Knicklasten maßgebend zu werden. Derartige Schnittpunkte beider Diagrammkurven gibt es, wie aus obiger Bedingungsgleichung zu entnehmen ist, mit $n = 2$ an allen Stellen $w = \pi, 2\pi, 3\pi \ldots\ldots = z \cdot \pi$ und entsprechen diesen Abszissen wegen $\frac{P}{EJ} = \frac{1}{n} \cdot \frac{P_{\text{Eng.}}}{EJ} = \frac{2}{n}\sqrt{\frac{W}{a\,EJ}}$ die Wertreihe der Bettungsziffern $\frac{W}{a} = \frac{16\,\pi^4}{9} \cdot z^4 \cdot \frac{EJ}{L^4}$, $z = 1, 2, 3, \ldots$ Man kann durch Differentiation den Tangens des Neigungswinkels der Tangenten an die beiden »$n$«-Linien allgemein erhalten und ergibt sich insbesonders an diesen Kreuzungsstellen beider Kurven mit »$n = 2$« und »$w = z \cdot \pi$« hierfür der einfache Ausdruck

$$\operatorname{tg} \varphi_z = \mp \frac{4 \cdot \cos z\pi}{\sqrt{3} \cdot \mathfrak{Sin}\,\frac{z \cdot \pi}{\sqrt{3}}} \ \ldots\ldots \begin{cases} »-« \ \ldots\ldots \text{ symm. Formen,} \\ »+« \ \ldots \text{ unsymm. Formen.} \end{cases}$$

Aus dieser Beziehung ist zu ersehen, daß die absoluten Größen dieser Neigungswinkel an den Kreuzungspunkten für beide Linien übereinstimmen, die Abszissenachse somit den Kreuzungswinkel halbiert; ferner erkennt man, wie schon die Zahlenwerte

$$\begin{cases} z = 1, \ \operatorname{tg}\varphi_1 = \pm\, 0{\cdot}7735 \ \ldots \\ z = 2, \ \operatorname{tg}\varphi_2 = \mp\, 0{\cdot}1228 \ \ldots \\ z = 3, \ \operatorname{tg}\varphi_3 = \pm\, 0{\cdot}0200 \ \ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ z \to \infty, \ \operatorname{tg}\varphi \to 0 \end{cases}$$

anzudeuten vermögen, die Eigenschaft der beiden Diagrammlinien, einerseits wegen des mit »$z$« wechselnden Vorzeichens abwechselnd die größeren »$n$« und damit die kleineren Knicklasten zu liefern und anderseits sich rasch der abszissenparallelen Geraden »$n = 2$« anzuschmiegen; Knickbedingung (I) ergibt demnach in den Wertbereichen

$$\frac{16}{9}(2z-1)^4\,\pi^4\,\frac{EJ}{L^4} < \frac{W}{a} < \frac{16}{9}(2z)^4 \cdot \pi^4\,\frac{EJ}{L^4},$$

Knickbedingung (II) in den Bereichen

$$\frac{16}{9} \cdot (2z)^4 \cdot \pi^4 \cdot \frac{EJ}{L^4} < \frac{W}{a} < \frac{16}{9}(2z+1)^4 \cdot \pi^4 \cdot \frac{EJ}{L^4}, \quad z = 1, 2, 3, \ldots$$

die kleinsten Knickkräfte, die sich mit anwachsendem $W/a$ immer mehr dem Grenzwert

$$P_k = \frac{1}{2}\,P_{\text{Eng.}} = \sqrt{\frac{W\,EJ}{a}}$$

nähern, so daß der Stab im Grenzfalle gleichzeitig bezüglich beider Gruppen von Formen instabil wird. Die »$n$«-Werte der größten Abweichung von ihrem Grenzwert »$n = 2$« sind für $w > \pi$ aus den Bedingungsgleichungen

[1]) Um bei gegebener Bettungsziffer die Knicklast eines Stabes zu finden, hat man einfach die beiden Diagrammlinien in Abb. 3 mit der einzutragenden Kurve

$$w = l \cdot \sqrt[4]{\frac{W}{a \cdot E \cdot J}} \cdot \sqrt{\frac{2(n+1)}{n}} = \Phi(n)$$

zum Schnitt zu bringen und erhält so die beiden, den Gruppen A und B angehörenden Werte »$n$«, von denen der größere maßgebend ist und die Knicklast $P_k = {}^1/_n \cdot P_{\text{Eng.}}$ ergibt.

$$\left.\begin{array}{l}\sin w \pm \frac{n-2}{n+2} \cdot \sqrt{\frac{n+1}{n-1}} \cdot \mathfrak{Sin}\, w \cdot \sqrt{\frac{n-1}{n+1}} = 0 \\ \cos w \pm \frac{n-2}{n+2} \cdot \mathfrak{Cos}\, w \cdot \sqrt{\frac{n-1}{n+1}} = 0\end{array}\right\} \ldots\ldots \begin{cases} \text{»}+\text{« \ldots symm. Formen,} \\ \text{»}-\text{« \ldots unsymm. Formen}\end{cases}$$

ermittelbar und findet man für das der Gruppe A zugehörende max · max $n = 2{\cdot}3375\ldots$ und das der Gruppe B angehörende min · min · $n = 1{\cdot}5899\ldots$

Zusammenfassend kann festgestellt werden:

1. daß ausschließlich die komplexen Wurzeln der charakteristischen Gleichung der Ausgangsdifferentialgleichung für die maßgebenden kleinsten Knicklasten in Betracht kommen,
2. daß die allgemeine Knickbedingung in zwei Bedingungsgleichungen zerfällt, denen zwei durch die Symmetrieverhältnisse gekennzeichnete Gruppen von instabilen Gleichgewichtsformen zugeordnet sind,
3. daß diese beiden, nach Gleichgewichtslagen unterschiedenen Knickbedingungen an den Stellen $\frac{W}{a} = \frac{16 \cdot \pi^4}{9} \cdot z^4 \cdot \frac{EJ}{L^4}$, $z = 1, 2, 3 \ldots$ übereinstimmende Wurzeln besitzen und in den dazwischen liegenden Wertbereichen des Bettungswiderstandes abwechselnd die maßgebenden kleinsten Knicklasten liefern,
4. daß die maßgebenden Knickkräfte beider Gruppen von Gleichgewichtsformen sich rasch dem Grenzwert $P_k = \frac{1}{2} \cdot P_{\text{Eng.}} = \sqrt{\frac{WEJ}{a}}$ nähern und
5. daß eine gelenkige Festhaltung der beiden Enden des eingebetteten Stabes die Knicklast um mehr als 100 vH zu erhöhen vermag.

Mit Beziehung auf brückenbauliche Anwendung ist noch zu bemerken, daß der durch die Formel $P_k = \sqrt{\frac{WE'J}{a}}$ angenähert gegebene Zusammenhang zwischen Knickkraft und gleichartig vorausgesetztem Rahmenwiderstand »$W$« ergänzt zu denken ist durch die Zusatzbedingung $P_k \leq \frac{\pi^2 E' J}{a^2}$, da die Möglichkeit einer sekundären Ausknickung innerhalb der Feldweite »$a$« der Knicklast eine obere Grenze setzt; durch die Einführung des Knickmoduls »$E'$« möge hier auch auf die wohl die Regel bildende Ueberschreitung des elastischen Bereiches hingewiesen werden. Das von Zimmermann im Zuge seiner strengen Behandlung des Druckgurtes offener Brücken[1]) gebrachte Zahlenbeispiel ist zu Vergleichszwecken nicht geeignet, da Zimmermann irrtümlicherweise den Elastizitätsmodul in Rechnung stellt, obwohl der geforderten Knicklast von 1055 t eine Knickspannung von etwa 3000 at entspricht, der bekanntlich ein sehr kleiner Knickmodul zugeordnet ist. 777

# Die Reibungsvorgänge in trockenlaufenden Kupplungen.

Von FRITZ FLORIG in Dresden.

Bei Betrachtung der in einer Kupplung sich abspielenden Reibungsvorgänge sind zwei Perioden zu unterscheiden. Während der einen wird die Kupplung eingerückt, während der anderen geschlossen gehalten. In der Einrückperiode wird der Anpressungsdruck von Null bis zu einem Maximalwert gesteigert, im zweiten Abschnitt bleibt er konstant. Am Ende der Einrückperiode, wenn der zweite Abschnitt beginnt, hat sich eine bestimmte Reibungskraft in der Kupplung eingestellt, die zur Uebertragung des jeweiligen Drehmomentes erforderlich ist. Es muß also die Möglichkeit bestehen, daß diese Reibungskraft in der Kupplung zumindest bis zu demjenigen Wert anwachsen kann, die dem der Berechnung der Kupplung zugrunde liegenden maximalen Drehmoment entspricht.

Bezeichnet $M\,d_{\max}$ das größte in Frage kommende Drehmoment, $R$ die Reibungskraft der Kupplung und $r_m$ ihren Reibradius, so muß zumindest sein:

$$R = \frac{M\,d_{\max}}{r_m}.$$

[1]) Die Knickfestigkeit der Druckgurte offener Brücken, Berlin 1910.

Um eine gewisse Kraftreserve zu besitzen, kann für den Fall, daß sich die Reibungsverhältnisse in der Kupplung verschlechtern, $R$ um einen Betrag größer als $M d_{\max}$ angenommen werden, so daß die folgende Beziehung gilt:

$$R > \frac{M\,d_{\max}}{r_m}.$$

Wiederum ist dies nicht zu empfehlen, wenn die Kupplung sozusagen die Rolle eines Sicherheitsventils mit übernehmen soll. Für den Fall, daß die auf die Kupplung wirkenden Drehmomente größer werden als die bei der Berechnung zugrunde gelegten, besteht dann die Gefahr der Ueberanspruchung der Triebwerksteile.

Entsprechend den genannten beiden Werten $R$ und $M d_{\max}$ muß auch die Antriebskraft $P$ der Kupplung bemessen sein und zwar muß hierbei die folgende Gleichung bestehen:

$$P = R = \frac{M\,d_{\max}}{r_m}.$$

Wird $R$ größer als $\frac{M\,d_{\max}}{r_m}$ gewählt, so gilt entsprechend wie oben:

$$P = R > \frac{M\,d_{\max}}{r_m}.$$

Wenn auch diese Beziehung der Berechnung zugrunde gelegt wird, so wird in der Kupplung zwischen den drei in Frage kommenden Größen stets Gleichheit bestehen:

$$P = R = \frac{M\,d}{r_m},$$

wobei $M d$ das jeweilig von der Kupplung zu übertragende Drehmoment bedeutet.

Während die Uebertragung der Kupplung in der Einrückperiode nur bei Schlupf erfolgt, kann die Reibungskraft bei geschlossener Kupplung verschiedener Art sein.

Versuche[1]) haben gezeigt, daß bei geschlossener Kupplung zwei Gebiete zu unterscheiden sind. Innerhalb des einen werden die Drehmomente ohne Schlupf, innerhalb des anderen bei vorhandenem Schlupf in der Kupplung übertragen. Es besteht also ein Gebiet der Ruhe und eins der Bewegung. Beide sind voneinander sehr verschieden, und auch die einzelnen Gebiete unter sich können sehr voneinander abweichen. Sie sind von folgenden Faktoren abhängig:

1. Den Reibungsmaterialien selbst.
2. Der Oberfläche der Reibungsmaterialien.
3. Dem spezifischen Reibungsdruck.
4. Der Temperatur der Reibflächen.

Durch die folgenden Betrachtungen sollen die beiden Uebertragungsgebiete näher erläutert werden:

Die Kupplung sei unter konstantem Anpressungsdruck geschlossen. Entsprechend dem von der Kupplung zu übertragenden Drehmoment wird sich eine bestimmte Reibungskraft in der Kupplung einstellen. Wird nun bei Bestimmung dieser Reibungskraft der Schlupf in der Kupplung durch geeignete Meßeinrichtungen genau ermittelt, so läßt sich angeben, ob die jeweilige Reibungskraft sich im Gebiet der Ruhe oder der Bewegung befindet.

Angenommen, es wird festgestellt, daß kein Schlupf in der Kupplung vorhanden ist. Die Reibungskraft liegt dann im Gebiete der Ruhe. Steigt das von der Kupplung zu übertragende Drehmoment, so muß auch die Reibungskraft anwachsen. Hat dieselbe einen bestimmten Wert erreicht, so stellt sich schließlich Schlupf in der Kupplung ein. Sobald dies der Fall ist, befindet sich die Reibungskraft im Gebiete der Bewegung.

Die Uebertragungsgebiete einer Reibungskupplung können auf einem entsprechend eingerichteten Prüfstande[2]) ermittelt werden. Die Bestimmung muß bei konstantem Anpressungsdruck auf die folgende Art und Weise durchgeführt werden, wobei für die einzelnen Bestimmungen verschieden hoher spezifischer Anpressungsdruck zu wählen ist:

Das Drehmoment der Kupplung wird allmählich gesteigert, bis sich ein bestimmter Schlupf und eine bestimmte Temperatur einstellen, bis zu welcher die Uebertragungsgebiete ermittelt werden sollen, und anschließend bei dieser Temperatur der Schlupf wieder

[1]) Florig, Beiträge zur Kenntnis der Reibungsverhältnisse bei Konus- und Scheibenkupplungen im Automobilbau. Dissertation, Dresden 1925.

[2]) A. O. S. 3.

auf Null verringert. Das Drehmoment, der Schlupf und die Temperatur der Reibflächen sind in kurzen Zeitabständen zu bestimmen. Die Endwerte von Schlupf und Temperatur sind für die verschiedenen Reibungsmaterialien nicht immer dieselben, da die einzelnen Materialien nicht gleichen Beanspruchungen gewachsen sind. Auf die genannte Weise lassen sich die Uebertragungsgebiete für alle Arten von Reibungsmaterialien feststellen, was vom Verfasser für eine Anzahl von Materialien durchgeführt worden ist. Hierbei wurde abgesehen von Größe und Lage der Uebertragungsgebiete die in der Abb. 1 dargestellte Grundform ermittelt.

Als Abszisse ist der in der Kupplung bestehende Schlupf und als Ordinate die spezifische Reibungskraft $\mu\, p$ der Kupplung aufgetragen worden, wobei $\mu$ den Reibungskoeffizienten und $p$ den spezifischen Anpressungsdruck bedeutet. Von Punkt 0 bis 2 reicht das Gebiet der Ruhe, 2, 3, 4, 1 stellt das Gebiet der Bewegung dar. Die Linie 2, 3 ist die obere Grenzkurve des Gebietes der Bewegung und gibt die maximalen Reibungskräfte bei Raumtemperatur wieder. Die untere Grenzkurve 4, 1 bilden die kleinsten

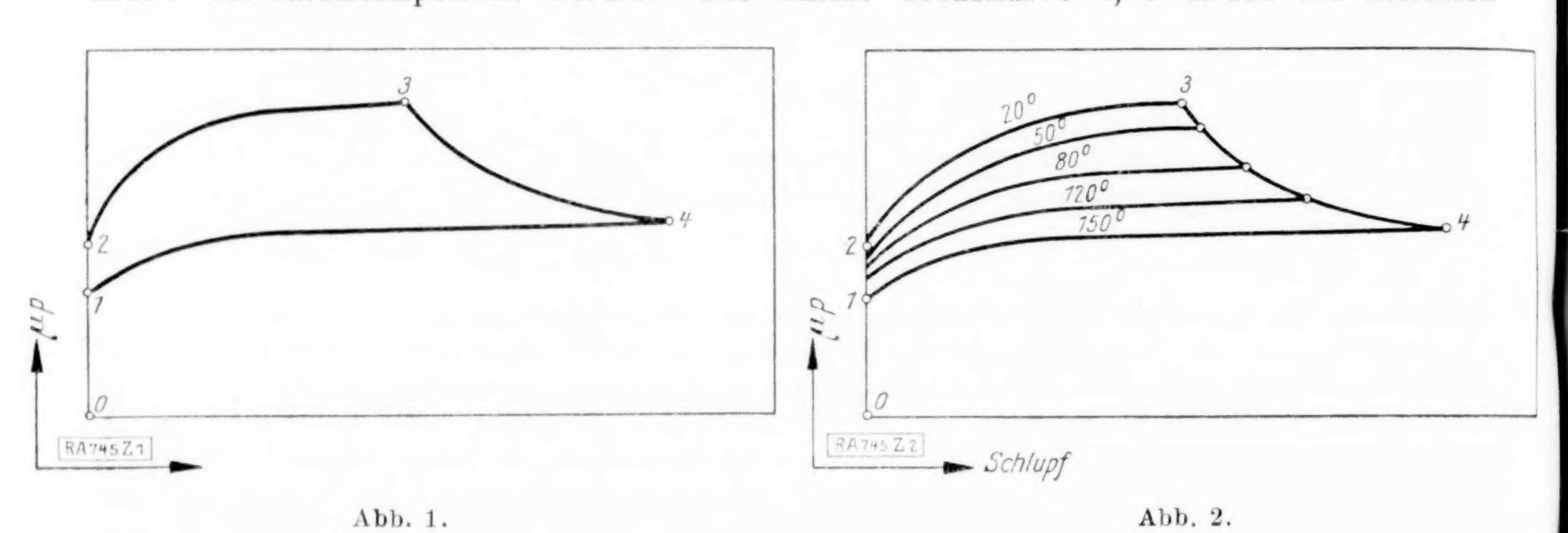



Abb. 1. Abb. 2.

$\mu\, p$-Werte, die einer höheren Temperatur der Reibflächen entsprechen, welche durch den Versuch bestimmt wird. In Punkt 3 haben die Reibungskräfte bei Raumtemperatur ihr Maximum erreicht. Der Schlupf wird nun so groß, daß die Temperatur der Reibflächen zu steigen beginnt. Die Reibungskräfte nehmen nun mit steigender Temperatur allmählich wieder ab. Zu jedem Punkt der Linie 3, 4 gehört eine entsprechende Temperatur. In Punkt 4 besteht die kleinste maximale Reibungskraft, die jedoch nicht immer der höchsten Temperatur der Reibflächen entspricht. Werden nun nach Erreichung der kleinsten Reibungskraft die Reibungskräfte weiter bei abnehmendem Schlupf bestimmt, wobei die entsprechende Reibflächentemperatur beizubehalten ist, so erhält man die bereits erwähnte untere Grenzlinie. Entsprechend lassen sich nun für die übrigen Temperaturen der Linie 3, 4 zahlreiche, zwischen den Grenzlinien verlaufenden $\mu\, p$-Kurven bestimmen, die ungefähr denselben Verlauf wie die Grenzlinien besitzen. Auf diese Weise ergibt sich für das Uebertragungsgebiet das in der Abb. 2 dargestellte Bild.

An Hand der Abb. 2 sei nochmals das gesamte Uebertragungsgebiet erläutert: Zwischen dem Punkt 0 und 2 befindet sich das Gebiet der Ruhe. Die Linie 2, 3 bildet die obere, 3, 4 die seitliche und 4, 1 die untere Grenzkurve des Gebietes der Bewegung. Die Linie 2, 3, die durch die größten Reibungskräfte bei Raumtemperatur gebildet wird, gilt im vorliegenden Falle für 20°. Die untere Grenzlinie 4, 1, welche die kleinsten gemessenen Reibungskräfte darstellt, soll beispielsweise einer Temperatur von 150° entsprechen. Zwischen beiden Grenzlinien verlaufen die $\mu\, p$-Kurven der übrigen, gemessenen Temperaturen, von denen als Beispiel diejenigen von 50°, 80° und 120° eingezeichnet worden sind.

Die Uebertragungsgebiete sind für die einzelnen Reibungsmaterialien bis zu einer möglichst hohen Reibflächentemperatur, bei einem entsprechend großen Schlupf und für verschieden hohen spezifischen Anpressungsdruck zu ermitteln. Vom Verfasser sind die Bestimmungen bis zu einer Reibflächentemperatur von 350°, einen Schlupf von 10 m/sek und spezifischem Anpressungsdruck bis 2 kg/cm² durchgeführt worden. Die dabei erreichbaren maximalen Werte sind davon abhängig, welchen Beanspruchungen ein Material gewachsen ist.

Die Uebertragungsgebiete können bezüglich ihrer Lage zu Ordinate und Abszisse und ihrer Größe sehr verschieden sein. So sind für gleiches Material bei hohem spezifischem Druck die Uebertragungsgebiete der Ruhe größer als bei kleinem Druck. Bei niedrigem Druck lösen sich die $\mu p$-Kurven schon bei geringen $\mu p$-Werten von der Ordinate los und steigen in großem Bogen allmählich bis zu ihrem Maximum an. Bei höherem Druck erfolgt die Loslösung erst bei größeren $\mu p$-Werten. Die $\mu p$-Kurven steigen dann sehr schnell an und verlaufen dann nach raschem Umbiegen ganz allmählich ohne große Steigung bis zum Maximum. Die sich auf diese Weise ergebenden zwei Arten der Uebertragungsgebiete sind in Abb 3 für niedrigen Druck und in Abb. 4 für höheren Druck aufgezeichnet worden.

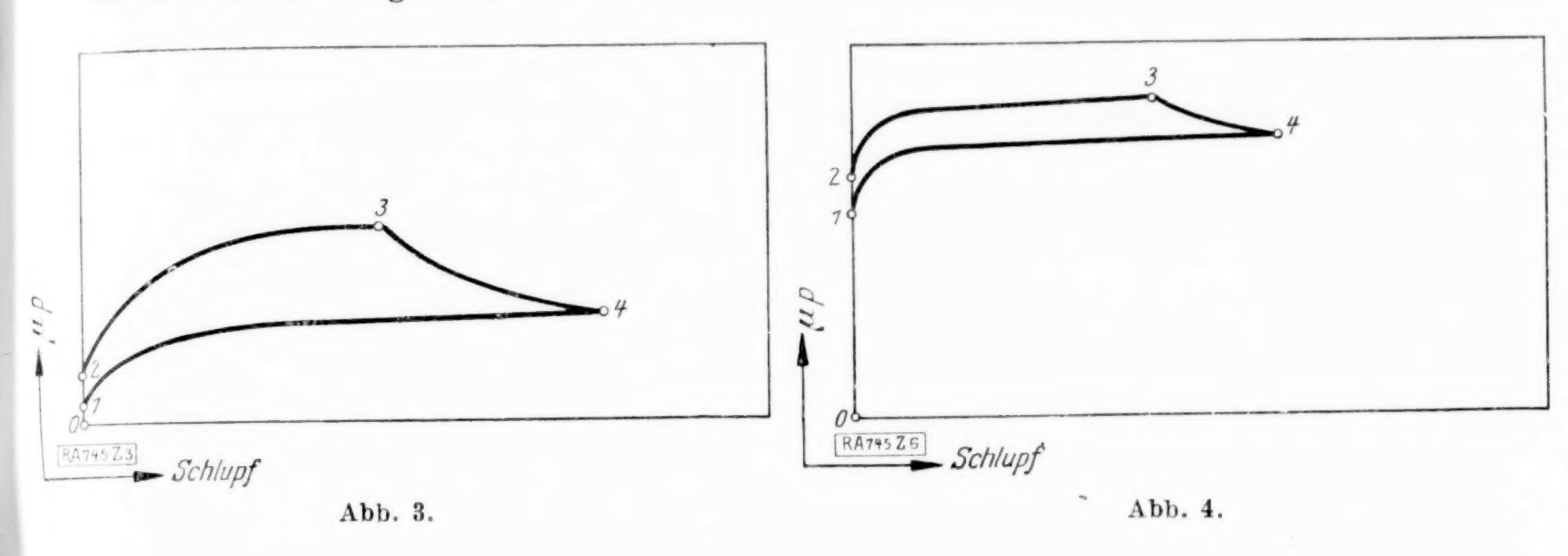



Abb. 3. Abb. 4.

Derselbe Unterschied der Uebertragungsgebiete kann sich auch trotz gleichen spezifischen Anpressungsdruckes als Folge verschiedenen Reibungsmaterials ergeben. Ist das Material mit Tran oder Oel getränkt oder mit Fett eingerieben, hat das Uebertragungsgebiet die Form nach Abb. 3, ist das Material trocken, ergibt sich mehr die Form von Abb. 4. Vor allem bei Reibung von Metall auf Metall findet sich die letztere Form am ausgeprägtesten.

Enthält ein Reibungsmaterial Bestandteile, die bei hohen Gleitgeschwindigkeiten infolge der Erhitzung weich werden, so ist das Gebiet der Bewegung in Richtung der Ordinate sehr breit (s. Abb. 5). Trocken bleibende Materialien dagegen besitzen sehr schmale Gebiete der Bewegung (s. Abb. 6).

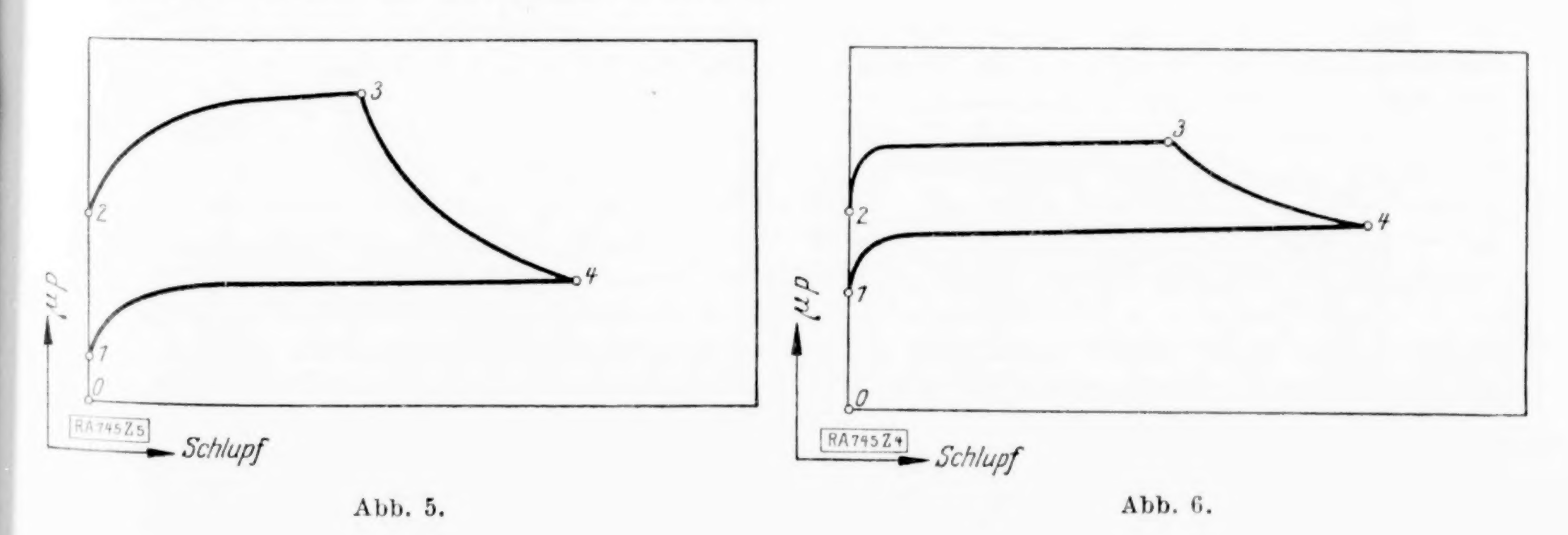



Abb. 5. Abb. 6.

Ist ein Material der Beanspruchung hoher Temperaturen und großen Schlupfes gewachsen und behält es dabei eine gleichmäßige und einwandfreie Oberfläche, so ergeben sich in Richtung der Abszisse sehr langes Uebertragungsgebiet der Bewegung wie in Abb. 7 dargestellt, im umgekehrten Fall kann es nur kurz sein (s. Abb. 8).

Anschließend sind für einige gebräuchliche Reibungsmaterialien die Uebertragungsgebiete gekennzeichnet, wie sie durch Versuche ermittelt wurden, wobei für alle genannten Materialien als Gegenreibungsmaterial geschlichteter Stahl verwendet wurde.

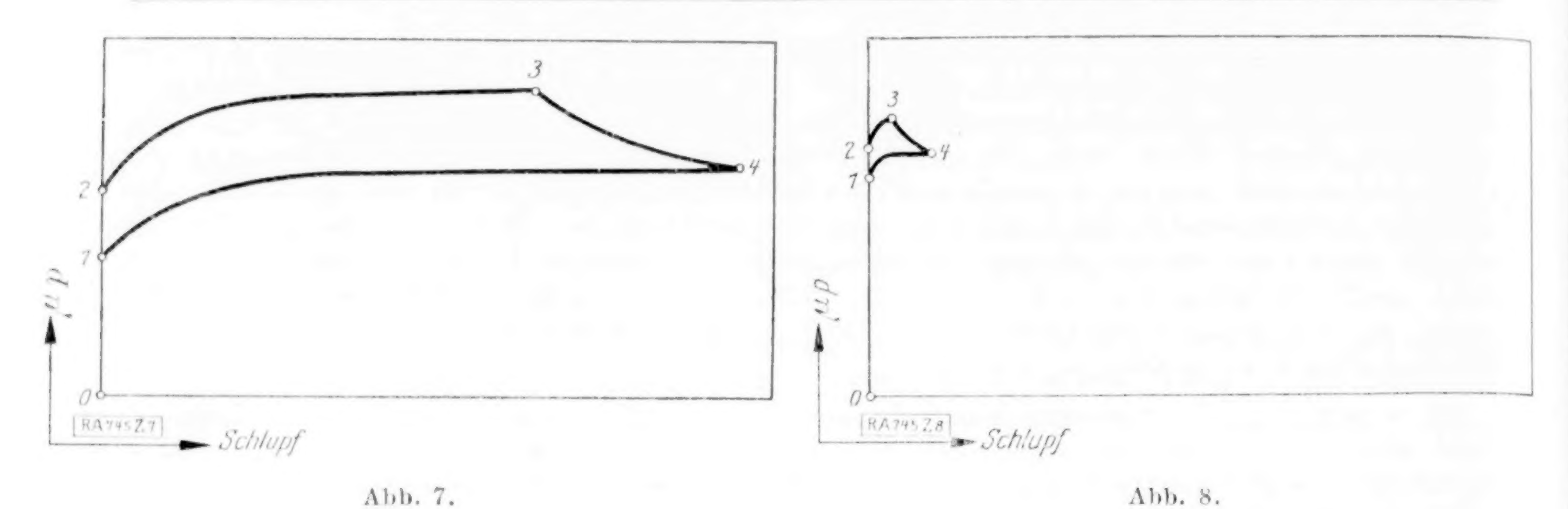



Abb. 7. Abb. 8.

1. Lederbelag mit Tran oder Oel getränkt.
   Das Gebiet der Ruhe: Auch bei hohem spezifischen Anpressungsdruck sehr klein.
   Das Gebiet der Bewegung: Form nach Abb. 3.
2. Baumwollbelag mit einer Mischung von Fett und Graphit eingerieben.
   Das Gebiet der Ruhe: Größer als bei Leder.
   Das Gebiet der Bewegung: Form nach Abb. 3.
3. Mit Draht durchwebter Asbestbelag, dessen zum Pressen verwendetes Imprägnierungsmittel infolge Erhitzung schnell weich wird.
   Das Gebiet der Ruhe: Größer als bei Baumwollbelag.
   Das Gebiet der Bewegung: Form nach Abb. 4, jedoch in Richtung der Ordinate sehr breit, wie in Abb. 5.
4. Gut ausgetrockneter, hart gepreßter, mit Draht durchwebter Asbestbelag.
   Das Gebiet der Ruhe: Gleichfalls groß.
   Das Gebiet der Bewegung: Form nach Abb. 4, in Richtung der Ordinate sehr schmal.
5. Trockenlaufendes Metall.
   Das Gebiet der Ruhe: Noch größer als bei Asbest in 4.
   Das Gebiet der Bewegung: Form nach Abb. 4, jedoch sehr kurz nach Abb. 8, da die Oberflächen im trockenen Zustand sehr bald fressen und dadurch eine schnelle Zerstörung der Reibflächen eintritt.

Die Kenntnis der Grundform der Uebertragungsgebiete einer trockenlaufenden Reibungskupplung ermöglicht die Vorgänge in einer solchen auf graphische Art, wie in der Abb. 9 dargestellt, wiederzugeben.

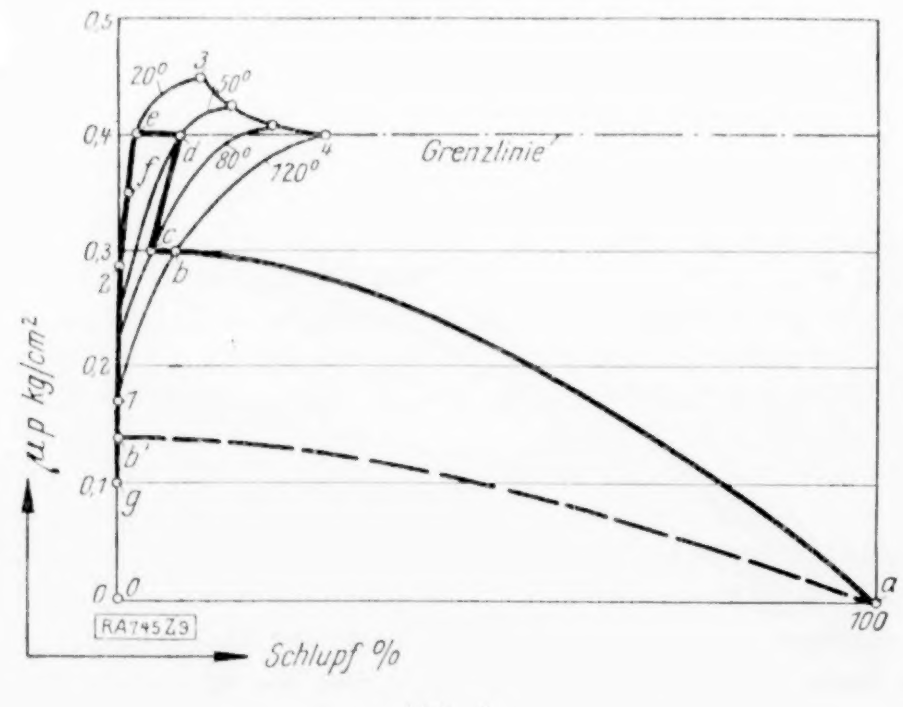



Abb. 9.

Auf der Abszisse wird der Schlupf der Kupplung von 0 bis 100 vH, auf der Ordinate die möglichen spezifischen Reibungskräfte aufgetragen. Die Linie $ab$ stellt die Einrückperiode, der Linienzug 012341 die Periode bei geschlossener Kupplung dar, wobei die letztere der besseren Darstellung wegen im Verhältnis zur Einrückperiode größer gezeichnet worden ist, als es der Wirklichkeit entspricht. Während der Einrückperiode steigt der Anpressungsdruck von 0 bis zum maximalen Wert an, und die Reibungskraft wächst von 0 bis zu dem Wert, welcher dem von der Kupplung zu Beginn des zweiten Abschnittes zu übertragendem Drehmoment entspricht. Während der

zweiten Periode bleibt der Anpressungsdruck konstant. Dieser zweite Abschnitt besteht, wie oben erläutert, aus zwei Teilen: Der erste ist das Gebiet der Ruhe, der von 0 bis 1 reicht. Der Linienzug 12341 begrenzt den zweiten Teil, das Uebertragungsgebiet der Bewegung. Die Einrückperiode kann ebenso gut im Gebiet der Ruhe enden. In diesem Fall würde sie durch die Linie $a\,b'$ dargestellt werden müssen. Je nach der Größe des bei Beginn des zweiten Abschnittes zu übertragenden Drehmomentes wird die Reibungskraft am Ende der Einrückperiode sich im Gebiet der Ruhe oder der Bewegung befinden.

Für die obere Grenzkurve, in der Abb. 9 die Linie 12, welche den größtmöglichen Reibungskräften entspricht, ist eine Temperatur von 20°, und für die untere Grenzkurve, die Linie 3 4, welche die kleinsten Reibungskräfte wiedergibt, eine Temperatur von 120° angenommen. Von den zwischen diesen Grenzlinien verlaufenden Reibungskraftkurven sind diejenigen bei 50° und die 80° eingezeichnet worden.

Angenommen die Temperatur der Reibflächen am Ende der Einrückperiode betrage 120°, und die spezifische Reibungskraft besitze den Wert 0,3. Demgemäß muß der Endpunkt $a$ der Einrückperiode auf dem Schnittpunkt der Wagerechten durch den Wert 0,3 auf der Ordinate mit der $\mu\,p$-Kurve bei 120° liegen. Dieser Schnittpunkt gibt gleichzeitig an, in welcher Größe der Schlupf in der Kupplung besteht. Bleibt die Kupplung nun geschlossen, so nimmt die Reibflächentemperatur allmählich ab. Entsprechend dieser Abnahme muß auch die Reibungskraft zu einem andern Punkt wandern. Die Temperatur sei auf 80° gefallen. Ist nun das zu übertragende Drehmoment der Kupplung das gleiche geblieben, so wird die Reibungskraft in wagrechter Richtung zur $\mu\,p$-Kurve von 80° bis zum Punkt $c$, dem Schnittpunkt der Wagerechten durch den Wert 0,3 und der $\mu\,p$-Kurve von 80° sich bewegen. Der Schlupf hat sich also um einen gewissen Betrag vermindert. Nimmt die Temperatur nun weiter ab und ändert sich außerdem das von der Kupplung zu übertragende Drehmoment, so wird die sich einstellende Reibungskraft eine Lage annehmen, die dem neuen Drehmoment und der neuen Temperatur entspricht. Ist die Temperatur auf 50° gefallen und der Wert, der dem neuen Drehmoment entspricht, beträgt 0,4, so befindet sich die neue Reibungskraft im Schnittpunkt der Wagrechten durch den Wert 0,4 mit der $\mu\,p$-Kurve bei 50°. Die Reibungskraft ist also vom Punkte $c$ nach $d$ gewandert. Der Schlupf hat sich wieder vergrößert. Die Temperatur der Reibfläche fällt weiter und soll schließlich die Temperatur des die Kupplung umgebenden Raumes von 20° annehmen. Die neue Reibungskraft muß somit auf der $\mu\,p$-Kurve von 20° sich befinden. Angenommen das Drehmoment der Kupplung bleibt konstant, so wird die Reibungskraft vom Punkt $d$ in wagrechter Richtung zu Punkt $e$ auf der $\mu\,p$-Kurve von 20° wandern, wobei der Schlupf sich wieder verringert. Wird das zu übertragende Drehmoment kleiner, so muß die Reibungskraft der Kupplung eine tiefere Lage auf der $\mu\,p$-Kurve von 20° annehmen. Der Schlupf wird also noch kleiner werden. Das neue Drehmoment soll einer Reibungskraft von 0,35 entsprechen Die Reibungskraft wandert also vom Punkt $e$ zum Schnittpunkt $f$ der Wagrechten durch diesen Wert mit der $\mu\,p$-Kurve von 20°. Wird das Drehmoment so klein, daß es, angenommen nur einer Reibungskraft von 0,1 entspricht, so wird sich die Reibungskraft nicht mehr im Gebiet der Bewegung, sondern im Gebiet der Ruhe befinden. Sie wird vom Punkt $f$ nach Punkt $g$ wandern, welcher mit dem Wert 0,1 der Ordinate zusammenfällt. Es ist also in der Kupplung kein Schlupf mehr vorhanden. Auf diese Weise lassen sich alle in der Kupplung abspielenden Reibungsvorgänge graphisch wiedergeben.

Wie weit das Uebertragungsgebiet einer Kupplung durch Wahl eines hohen Reibungskoeffizienten ausgenutzt wird, hängt von der Größe der zur Verfügung stehenden Antriebskraft ab. Die maximale Antriebskraft ist stets die Grenze in der Ausnutzung des Uebertragungsgebietes. In der Darstellung der Abb. 9 ist eine Antriebskraft angenommen, die einer spezifischen Reibungskraft von 0,4 entspricht. Die Wagrechte durch diesen Wert der Ordinate bildet also im vorliegenden Falle die Grenze der Ausnutzung des Uebertragungsgebietes. Die spezifische Reibungskraft der Kupplung kann somit bis zu 0,4 anwachsen, wobei je nach der Temperatur der Reibflächen der Schlupf verschieden groß ist. Wird das von der Kupplung zu übertragende Drehmoment so hoch, daß eine größere spezifische Reibungskraft als 0,4 erforderlich ist, so reicht die Antriebskraft der Kupplung nicht mehr aus.

Als letzte Frage wäre noch zu erörtern, wieweit das Uebertragungsgebiet einer Kupplung ausgenutzt werden soll, ob nur das Gebiet der Ruhe, oder ob auch das Gebiet der Bewegung mit zu verwenden ist. Soll nur das Gebiet der Ruhe herangezogen

werden, so müssen Reibungsmaterialien benutzt werden, die auch bei kleinen spezifischen Anpressungsdrücken ein großes Gebiet der Ruhe aufweisen. Die Möglichkeit der Vergrößerung des Gebietes der Ruhe durch Steigerung des spezifischen Anpressungsdruckes hat bald seine Grenze; denn die Bedienung der Kupplung ist zumeist nur bis zu einer bestimmten Höhe des axialen Anpressungsdruckes möglich, außerdem neigt eine Kupplung mit zu hohem spezifischen Anpressungsdruck zu ruckartiger Uebertragung beim Einkuppeln. Es bleibt dann als weitere Möglichkeit, die Reibflächen entsprechend zu vergrößern, entweder in bezug auf Größe oder Anzahl oder beides. Doch auch hierbei ist in konstruktiver Hinsicht eine Grenze gesetzt. Als letzte Möglichkeit bleibt dann die Verwendung des Uebertragungsgebietes der Bewegung, wodurch die Uebertragungsfähigkeit einer Kupplung um ein Mehrfaches vergrößert wird. Die Benutzung eines Teiles dieses Gebietes ist schließlich auch kein Schaden, sofern der in der Kupplung auftretende Schlupf in kleinen Grenzen bleibt und nur ein Bruchteil eines Prozentes der Drehzahl der treibenden Kupplungshälfte beträgt. Im Gegenteil kann ein derartig kleiner Schlupf der Kupplung eher zum Nutzen gereichen, da dieselbe dadurch zu einem elastischen Uebertragungselement wird, und die Bruchgefahr der Triebwerkteile bei plötzlich auftretenden Widerständen sehr vermindert wird. Eine Erhöhung der Reibflächentemperatur und ein merklicher Verschleiß tritt bei derartig kleinem Schlupf in der Kupplung nicht auf. 745

# Über die Beschleunigungen bei der räumlichen Bewegung des starren Körpers.

Von **KARL FEDERHOFER** in Graz.

Nur in ganz vereinzelten Fällen wurde bisher in der technischen Literatur der Versuch gemacht, die zeichnerische Methode, die sich bei der Untersuchung der ebenen Bewegung zufolge ihrer Einfachheit und Durchsichtigkeit längst eingebürgert hat, auch bei der Beschreibung der Bewegung des starren Körpers im Raume anzuwenden. Die Verhältnisse liegen hier ähnlich wie in der graphischen Statik des räumlichen Fachwerkes, die erst durch das von Mayor und v. Mises[1]) angegebene neue Abbildungsprinzip in eine für die Anwendungen brauchbare Darstellungsform gebracht worden ist.

Bei meinen vor längerer Zeit begonnenen Vorarbeiten zu einer graphischen Dynamik räumlicher Systeme suchte ich zunächst die rein kinematischen Fragen, insbesonders jene nach dem Beschleunigungszustande, auf zeichnerischem Wege zu lösen. Dies gelingt mit Benutzung des genannten Abbildungsprinzipes in verhältnismäßig einfacher Weise, worüber in diesem Aufsatze kurz berichtet werden soll.

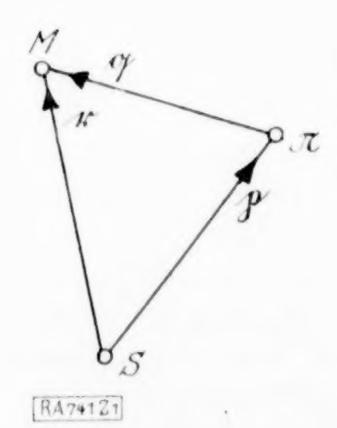


Abb. 1.

**1. Der Beschleunigungszustand eines im Raume frei bewegten starren Körpers** ist durch die Winkelgeschwindigkeit $\mathfrak{w}$, die Winkelbeschleunigung $\mathfrak{l}$ und durch die Beschleunigung eines Systempunktes bestimmt. Wählen wir hierfür den Schwerpunkt $S$ des Körpers und nennen seine Beschleunigung $\mathfrak{b}_S$, so ist die Beschleunigung eines Systempunktes $M$ (Abb. 1), der durch den Ortsvektor $\mathfrak{r}$ in bezug auf $S$ festgelegt ist, gegeben durch

$$\mathfrak{b}_M = \mathfrak{b}_S + \mathfrak{l} \times \mathfrak{r} + \mathfrak{w} \times \mathfrak{w} \times \mathfrak{r} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

($\times$ bedeutet ein Vektorprodukt).

Von dem Sonderfalle $\mathfrak{w} \parallel \mathfrak{l}$ abgesehen, gibt es einen einzigen Punkt; den Beschleunigungspol $\pi$, für den die Beschleunigung verschwindet, seine Kenntnis vereinfacht die Darstellung des Beschleunigungszustandes. Sei $\mathfrak{p}$ der Ortsvektor von $\pi$ bezüglich $S$, $\mathfrak{q} = \overrightarrow{\pi M}$, so folgt aus (1):

$$\mathfrak{b}_\pi = 0 = \mathfrak{b}_S + \mathfrak{l} \times \mathfrak{p} + \mathfrak{w} \times \mathfrak{w} \times \mathfrak{p},$$

und es geht mit $\mathfrak{q} = \mathfrak{r} - \mathfrak{p}$ die Gl. (1) über in:

$$\mathfrak{b}_M = \mathfrak{l} \times \mathfrak{q} + \mathfrak{w} \times \mathfrak{w} \times \mathfrak{q} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2).$$

[1]) B. Mayor, Statique graphique des systèmes de l'espace, 1910. — R. v. Mises, Graphische Statik räumlicher Systeme. Z. f. Math. u. Physik, 1916.

Hiernach verteilen sich die Beschleunigungen um den Pol $\pi$ so, als wenn in diesem festgehaltenen Punkte die Vektoren $\mathfrak{w}$ und $\mathfrak{l}$ angebracht wären. Eine einfache zeichnerische Ermittlung der Winkelbeschleunigung $\mathfrak{l}$ aus den gegebenen äußeren Kräften und aus dem Zentralellipsoid soll in einer späteren Arbeit gezeigt werden. Für das Folgende wollen wir die Winkelbeschleunigung $\mathfrak{l}$ als bekannt ansehen. Dann handelt es sich darum:

a) aus den gegebenen Vektoren $\mathfrak{w}$ und $\mathfrak{l}$ bei bekanntem Beschleunigungspole $\pi$ die Beschleunigung des Schwerpunktes $S$ und eines beliebigen Systempunktes $M$ zu konstruieren;

b) aus $\mathfrak{w}$, $\mathfrak{l}$ und $\mathfrak{b}_S$ den Beschleunigungspol $\pi$ zu ermitteln.

Für die Zwecke der zeichnerischen Darstellung der Beschleunigungen als Strecken empfiehlt es sich, nach dem Vorgange Th. Pöschls[1]) die reduzierten Beschleunigungen einzuführen, indem die Beschleunigungen durch $\omega^2$ dividiert werden. ($\omega$ = Betrag des Vektors $\mathfrak{w}$.) Wir setzen

$$\mathfrak{g}_M = \frac{\mathfrak{b}_M}{\omega^2}; \qquad \mathfrak{g}_S = \frac{\mathfrak{b}_S}{\omega^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3).$$

**2. Darstellung der Raumvektoren.** Hierfür verwenden wir das von Mayor entwickelte Abbildungsprinzip, das v. Mises für die Zwecke der Raumkraftstatik sehr bequem und durchsichtig gestaltet hat. Es werden den Raumvektoren die Kräfte in einer Ebene (Abbildungsebene) ein-eindeutig zugeordnet.

Seien $P'$ und $P''$ Grundriß und Aufriß eines Raumvektors $\mathfrak{P}$, $X\,Y\,Z$ seine Komponenten in bezug auf das in Abb. 2 eingetragene Achsenkreuz mit dem Ursprung $S$, so wird diesem in der Bezugsebene $X\,Y$ eine Kraft $P_1$ zugeordnet mit den Teilkräften

$$X_1 = X, \qquad Y_1 = Y.$$

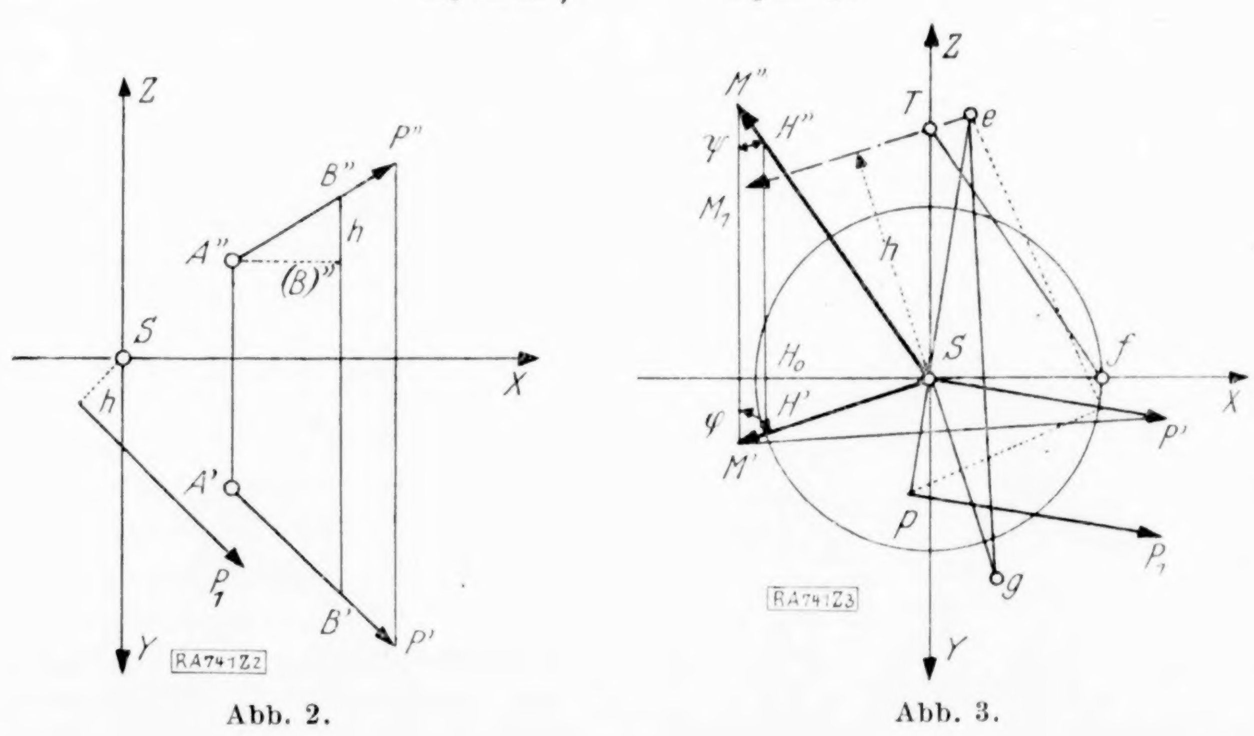



Abb. 2. Abb. 3.

Das Moment $M_1$ von $P_1$ um $S$ wird $c \cdot Z$ gesetzt, worin $c$ eine beliebige positive Konstante bedeutet; positiven Werten von $Z$ sollen Momente $M_1$ zugeordnet sein, die von oben gesehen, entgegengesetzt dem Uhrzeigersinne drehen.

Nach dieser Festlegung erhält man das Bild $P_1$ von $\mathfrak{P}$, indem auf $P'$ die Strecke $A'B'$ gleich $c$ gemacht wird und aus dem Aufriß das Maß $(B)\,B''$ gleich dem Hebelarm $h$ entnommen wird. Das Bild ist dann parallel zu $P'$ und hat die Entfernung $h$ von $S$.

Auch die Momentenvektoren werden in einfacher Weise durch Kräfte in der Bezugsebene abgebildet. Sind $M_x\,M_y\,M_z$ die Komponenten des Momentes $\mathfrak{M}$ einer Kraft $\mathfrak{P}$ bezüglich $S$ und ist die Kraft $\mathfrak{P}$ durch ihr Bild $P_1$ und durch den Spurpunkt $g$ ihrer Wirkungslinie in der Abbildungsebene festgelegt (Abb. 3), so liefert die Zuordnung

$$X' = M_x/c, \qquad Y' = M_y/c, \qquad Z' = M_z$$

die Elemente des Bildes $M_1$ in der Bezugsebene.

Das Bild $M_1$ des Momentenvektors $\mathfrak{M}$ steht senkrecht auf $S\,g$ und geht durch den Antipol $e$ des Bildes $P_1$ in Bezug auf $S$ ($S\,p \cdot S\,e = c^2$). Zieht man durch $P'$ die Normale

[1]) Zeitschr. f. Math. u. Physik, Bd. 63, S. 246.

zu $e\,g$, so schneidet sie die in $S$ errichtete Senkrechte zu $S\,g$ in $M'$ und man hat in $\overline{S\,M'}$ die Länge des Bildes $M_1$ gefunden[1]).

Es ist

$$\overline{S\,M'} \cdot c = \sqrt{M_x^2 + M_y^2}\,, \qquad \overline{S\,M'} \cdot h = M_z \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (4).$$

Man erhält daher den Aufriß $S\,M''$ des Momentvektors, indem man im Schnitte $H'$ von $S\,M'$ mit dem Abbildungskreise den Projektionsstrahl senkrecht zur $x$-Achse zieht und auf diesem von $H_0$ aus die Länge $h$ bis $H''$ in jenem Sinne aufträgt, der dem Drehsinne des Bildes $M_1$ entspricht. Dann liegt $M''$ auf dem Strahle $S\,H''$.

Es ist leicht nachzuweisen, daß der Aufriß $S\,M''$ parallel sein muß zur Geraden $T\,f$, wobei $T$ der Schnittpunkt des Bildes $M_1$ mit der $Y$achse ist.

Nach der beschriebenen Konstruktion ist

$$\operatorname{tang} \psi = \frac{\overline{H_0\,S}}{\overline{H_0\,H''}} = \frac{\overline{H_0\,S}}{h} = \frac{c \cdot \sin \varphi}{h}.$$

Da aber

$$\frac{h}{\sin \varphi} = \overline{S\,T} \text{ und } c = \overline{S\,f}, \quad \text{so folgt} \quad \operatorname{tang} \psi = \frac{\overline{S\,f}}{\overline{S\,T}}, \quad \text{d. h:} \quad \underline{T\,f \parallel S\,M''}.$$

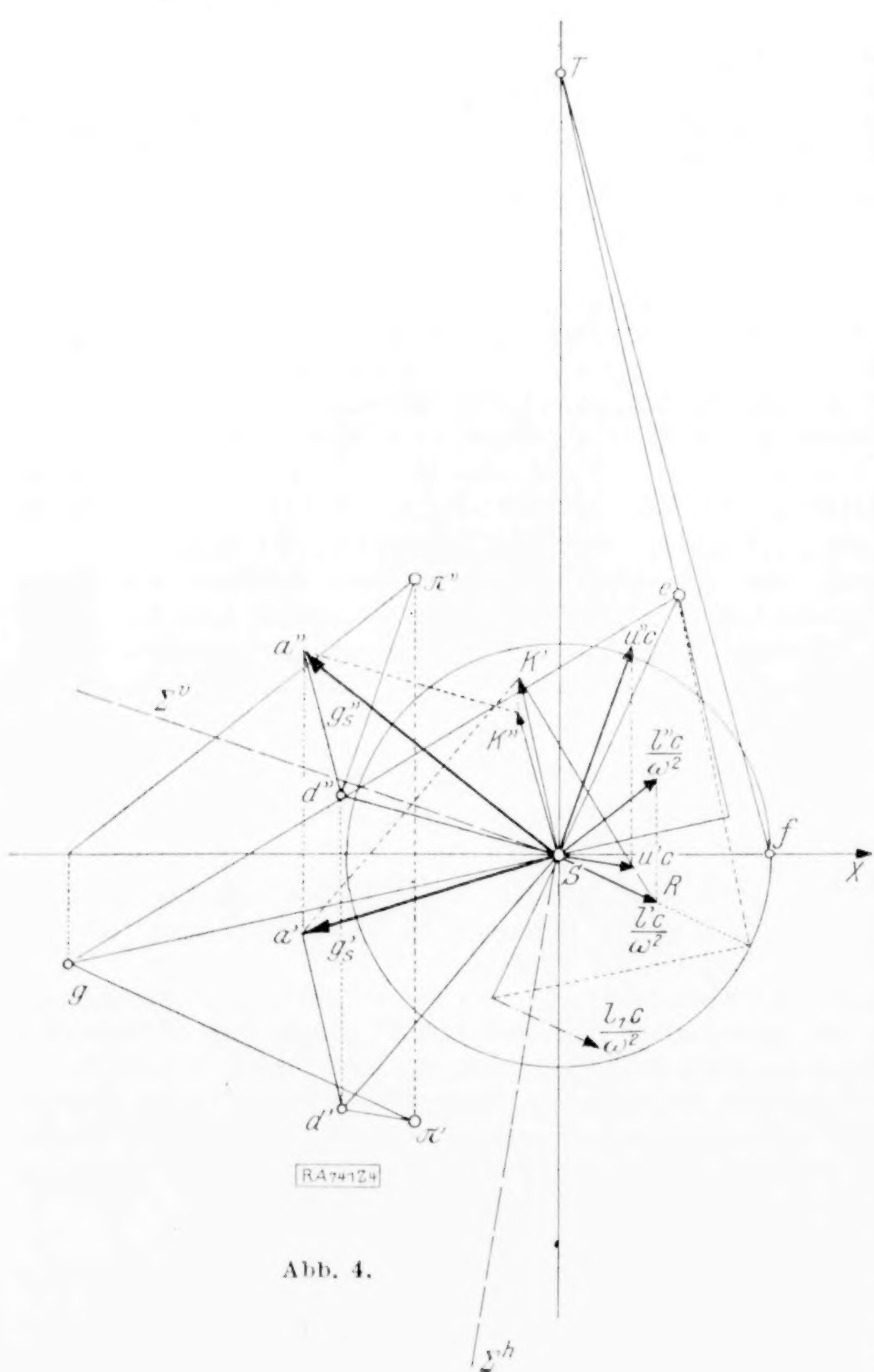



Abb. 4.

**3. Konstruktion von $\mathfrak{g}_S$ aus dem gegebenen Beschleunigungspole $\pi$ und den Vektoren $\mathfrak{w}$ und $\mathfrak{l}$.** Letztere stellen wir als Strecken mit den Längen $c \cdot \mathfrak{u}$ und $c \cdot \mathfrak{l}/\omega^2$ dar, wo $\mathfrak{u}$ den Einheitsvektor der Richtung $\mathfrak{w}$ bedeutet. Die beiden Vektoren sollen zu der durch $S$ gelegten, mit der Grundrißebene zusammenfallenden Abbildungsebene vorläufig ganz beliebige Lagen haben.

Da bei Anwendung der Gleichung (2) auf den Punkt $S$ der Vektor $\mathfrak{q}$ zu ersetzen ist durch $\overrightarrow{\pi S} = -\mathfrak{p}$, so ergibt sich

$$\mathfrak{g}_S = \mathfrak{u} \times \mathfrak{u} \times (-\mathfrak{p}) + \mathfrak{l}/\omega^2 \times (-\mathfrak{p}) = \mathfrak{g}_{S,1} + \mathfrak{g}_{S,2} \quad (5).$$

Darin bedeutet $\mathfrak{g}_{S,1} = \mathfrak{u} \times \mathfrak{u} \times (-\mathfrak{p})$ die Zentripetalbeschleunigung des Schwerpunktes $S$ bei der Drehung um die durch den festgedachten Pol $\pi$ gelegte Drehachse $\mathfrak{u}$, gerichtet von $S$ zur Drehachse; $\mathfrak{g}_{S,2} = \mathfrak{p} \times \mathfrak{l}/\omega^2$ die Tangentialbeschleunigung.

Legen wir (Abb. 4) durch $S$ die Ebene $\Sigma$ senkrecht zur Richtung $\mathfrak{u}$ und bestimmen ihren Durchstoßpunkt $d$ mit der durch $\pi$ zu ihr gefällten Senkrechten, dann ist bereits $\overrightarrow{S\,d} = \mathfrak{g}_{S,1}$.

Der Beschleunigungsteil $\mathfrak{g}_{S,2}$ ist als statisches Moment des in $\pi$ angesetzten Vektors $\mathfrak{l}/\omega^2 \cdot c$ um $S$ nach den Angaben in (2) zu konstruieren. Man bestimmt

[1]) Bezügl. des Beweises hierfür sei auf die vorhin zitierte v. Misessche Arbeit verwiesen.

zunächst den Spurpunkt $g$ dieses Vektors, dann sein Bild $\left(\frac{\mathfrak{l}_1 c}{\omega^2}\right)$ und dessen Antipol $e$ bezüglich $S$. Das Bild von $\mathfrak{g}_{S,2}$ geht durch $e$ und steht senkrecht auf $S\,g$. Zieht man endlich durch $R$ die Normale zu $g\,e$ und bringt sie in $k'$ zum Schnitte mit der durch $S$ gelegten Senkrechten zu $g\,S$, so ist in der Strecke $\overrightarrow{S\,k'}$ der Grundriß von $\mathfrak{g}_{S,2}$ gewonnen.

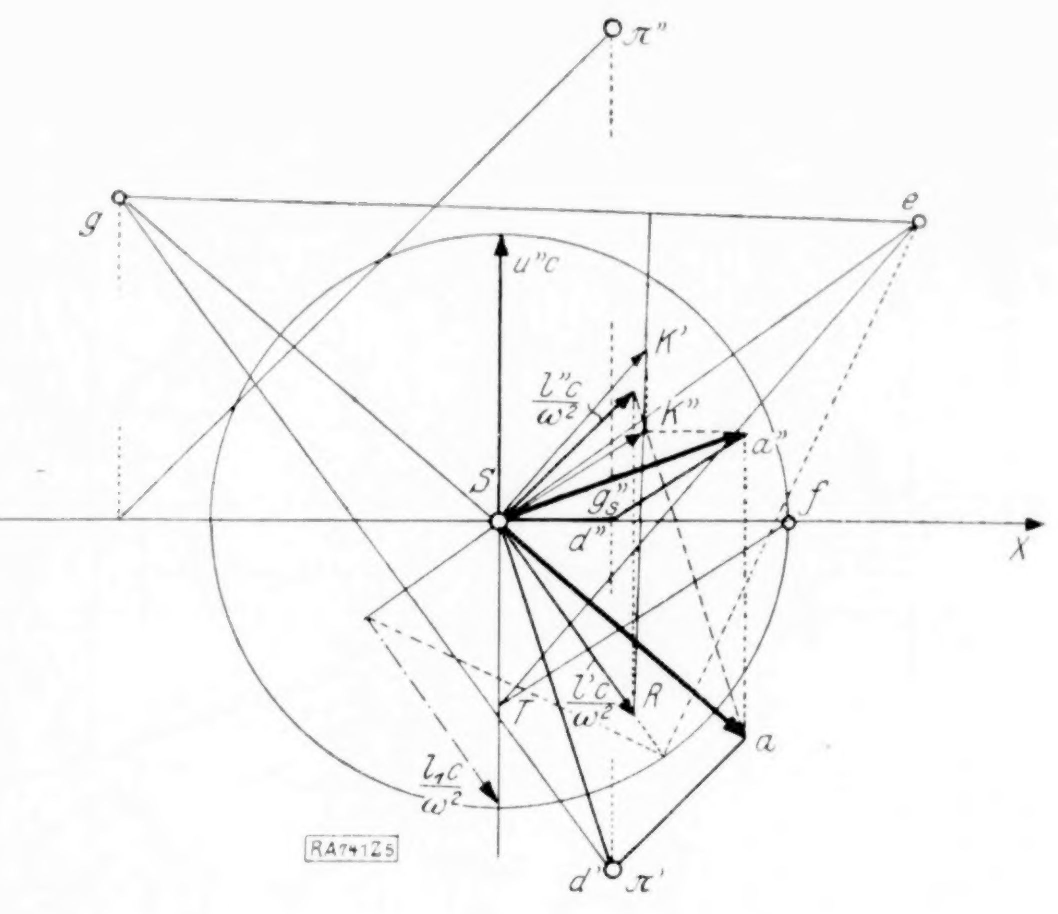



Abb. 5.

Der Aufriß $S\,k''$ ist parallel zu $T\,f$. Die geometrische Zusammensetzung von $\overrightarrow{S\,d}$ und $\overrightarrow{S\,k}$ liefert Grund- und Aufriß ($g_S'$ und $g_S''$) der reduzierten Beschleunigung $\mathfrak{g}_S$.

Die Konstruktion vereinfacht sich, wenn die Richtung $\mathfrak{u}$ der Drehachse senkrecht steht zur Bildebene. Dann fällt $d'$ nach $\pi'$, $d''$ liegt in der $X$-achse (Abb. 5).

Die einfachste Darstellung von $\mathfrak{g}_S$ ergibt sich, wenn als Aufrißebene die Ebene $S, \mathfrak{u}, \mathfrak{l}$ gewählt wird. Dann liegt der Antipol $e$ in der $Y$-achse und es ist $e\,f \perp \mathfrak{l}''$.

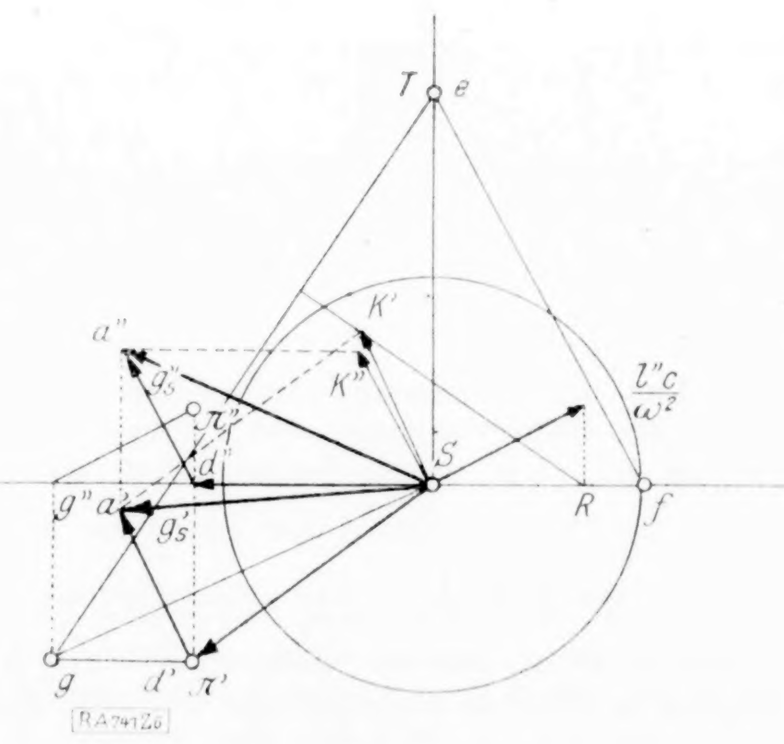



Abb. 6.

Die Zeichnung des Bildes von $\mathfrak{l}$ ist daher überflüssig. Der Hilfspunkt $T$ fällt zusammen mit $e$, somit ist der Aufriß $S\,k'' \parallel e\,f$. Es genügen die paar in Abb. 6 eingetragenen Linien zur Konstruktion der reduzierten Beschleunigung $\mathfrak{g}_S$.

**4. Konstruktion der reduzierten Beschleunigung $\mathfrak{g}_M$ eines beliebigen Punktes $M$ (Abb. 7).** Auch hierfür kann das vorstehend beschriebene Verfahren verwendet werden, wenn es mit einer kleinen Ergänzung versehen wird. Es ist

$$\mathfrak{g}_M = \mathfrak{u} \times \mathfrak{u} \times \mathfrak{q} + \mathfrak{l}/\omega^2 \times \mathfrak{q}\,,$$

wo $\mathfrak{q} = \overrightarrow{\pi\,M}$. Man legt durch $M$ die Ebene $\Sigma$ senkrecht zu $\mathfrak{u}$ und bestimmt ihren Durchstoßpunkt $d$ mit der durch den Pol $\pi$ zu $\Sigma$ gezogenen Senkrechten. Dann ist

$$\overrightarrow{M\,d} = \mathfrak{g}_{M\,1} = \mathfrak{u} \times \mathfrak{u} \times \mathfrak{q}.$$

Der Teil $\mathfrak{g}_{M,2} = \mathfrak{l}/\omega^2 \times \mathfrak{q}$ ist als statisches Moment des in $\pi$ angesetzten Vektors $\mathfrak{l}/\omega^2 \cdot c$ in bezug auf $M$ zu konstruieren. Da aber $M$ nicht in der Bildebene gelegen ist, so muß das in Abb. 3 gezeigte Verfahren, das einen in der Bildebene liegenden Drehpunkt voraussetzt, noch ergänzt werden. Aus der Beziehung

$$\overrightarrow{\pi\,M} + \overrightarrow{M\,M'} = \overrightarrow{\pi\,M'}$$

folgt

$$\mathfrak{q} = \overrightarrow{\pi\,M} = \overrightarrow{\pi\,M'} - \overrightarrow{M\,M'} = \overrightarrow{\pi\,M'} + \overrightarrow{M'\,M}$$

und daher

$$\mathfrak{g}_{M,2} = \mathfrak{l}/\omega^2 \times \overrightarrow{\pi\,M'} + \mathfrak{l}/\omega^2 \times \overrightarrow{M'\,M}.$$

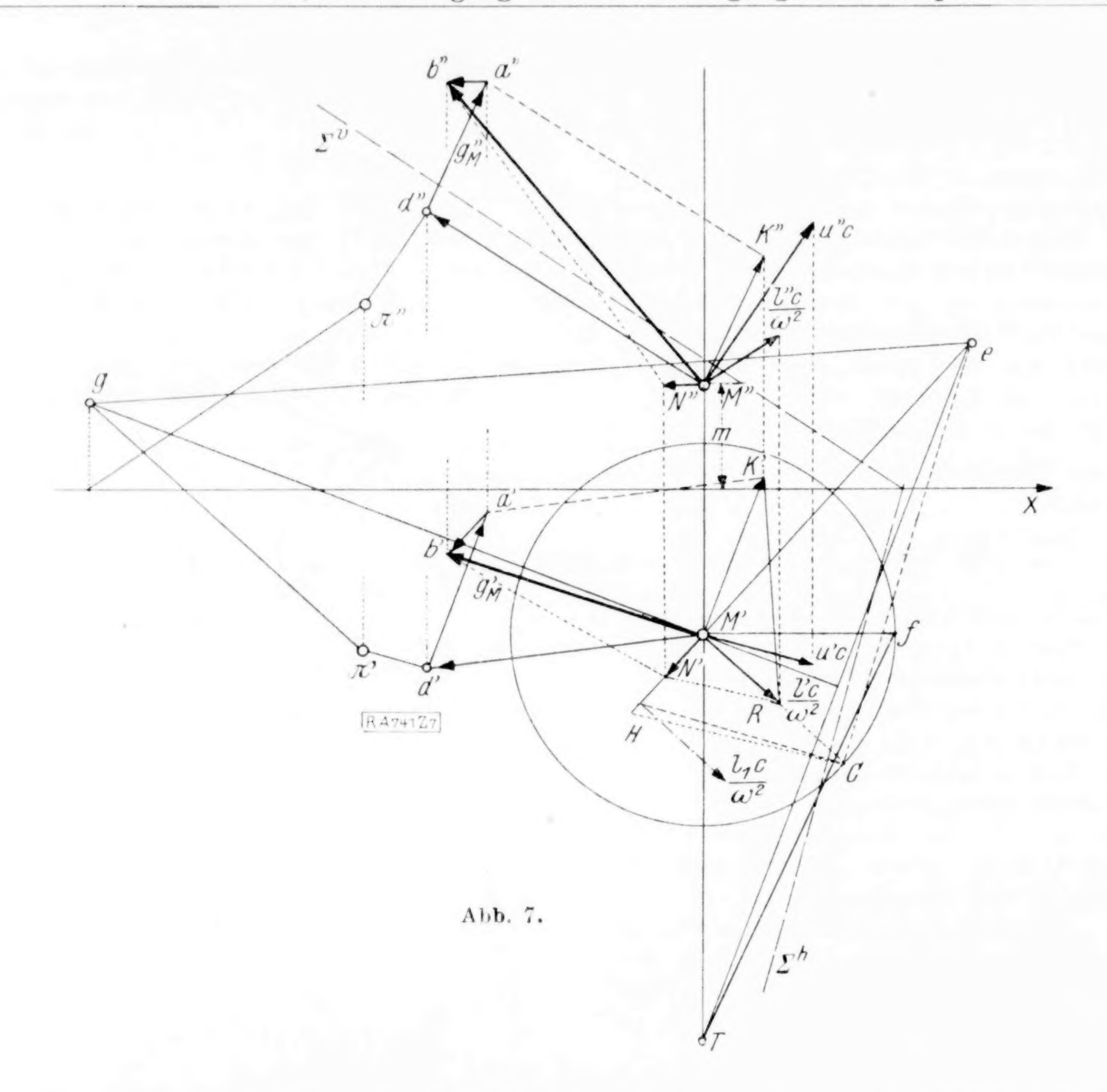


Abb. 7.

Der erste Summand stellt das Moment des in $\pi$ angesetzten Vektors $\mathfrak{l}/\omega^2$ um den in der Bildebene liegenden Punkt $M'$ dar, das in der früher gezeigten Art zu konstruieren ist. Der zweite Summand ist durch einen Vektor parallel zur Bildebene dargestellt, da $\overrightarrow{M'M}$ senkrecht zur Bildebene steht; sein Aufriß ist parallel zur $X$-achse, das Bild geht durch $M' \perp l'$. Der Absolutbetrag ist $\frac{\overline{M'M} \cdot \overline{M'R}}{c} = \frac{m}{c} \cdot \overline{M'R}$. Macht man daher auf der in $M'$ errichteten Senkrechten zu $l'$ die Strecke $\overline{M'H} = m$ und zieht durch $R$ die Parallele zu $HC$, so schneidet sie auf $M'H$ die Strecke $\overline{M'N'}$ ab, die gleich dem gesuchten Betrage $\frac{m}{c} \cdot \overline{M'R}$ ist.

Man hat daher

$$\mathfrak{g}_M = \overrightarrow{Md} + \overrightarrow{Mk} + \overrightarrow{MN}$$

und es gibt der Linienzug $\overline{Md} + \overline{da} + \overline{ab}$ in $\overrightarrow{Mb}$ die gesuchte reduzierte Beschleunigung $\mathfrak{g}_M$.

**5. Konstruktion des Beschleunigungspoles**[1]**.** Gegeben seien die Vektoren $\mathfrak{u} \cdot c$, $\frac{\mathfrak{l}}{\omega^2} \cdot c$ und die reduzierte Beschleunigung $\mathfrak{g}_s$ des Schwerpunktes $S$, durch den die Bildebene gelegt wird. Der Beschleunigungspol $\pi$ wird durch Umkehrung der in 3 beschriebenen Konstruktion gewonnen.

Nach dieser ist der Punkt $d$ jedenfalls in den beiden Ebenen $\Sigma \perp \mathfrak{u}$ durch $S$ und $\varepsilon \perp \mathfrak{l}$ durch $a$ liegen (Abb. 8); es ist daher deren Schnittlinie $L$ ein geometrischer Ort für den Punkt $d$. Bewegt sich $d$ auf $L$, dann erfüllen die Endpunkte $k$ der Vektoren

[1]) Eine andere allgemeine Konstruktion hierfür stammt von Th. Pöschl. Siehe Fußnote S. 291.

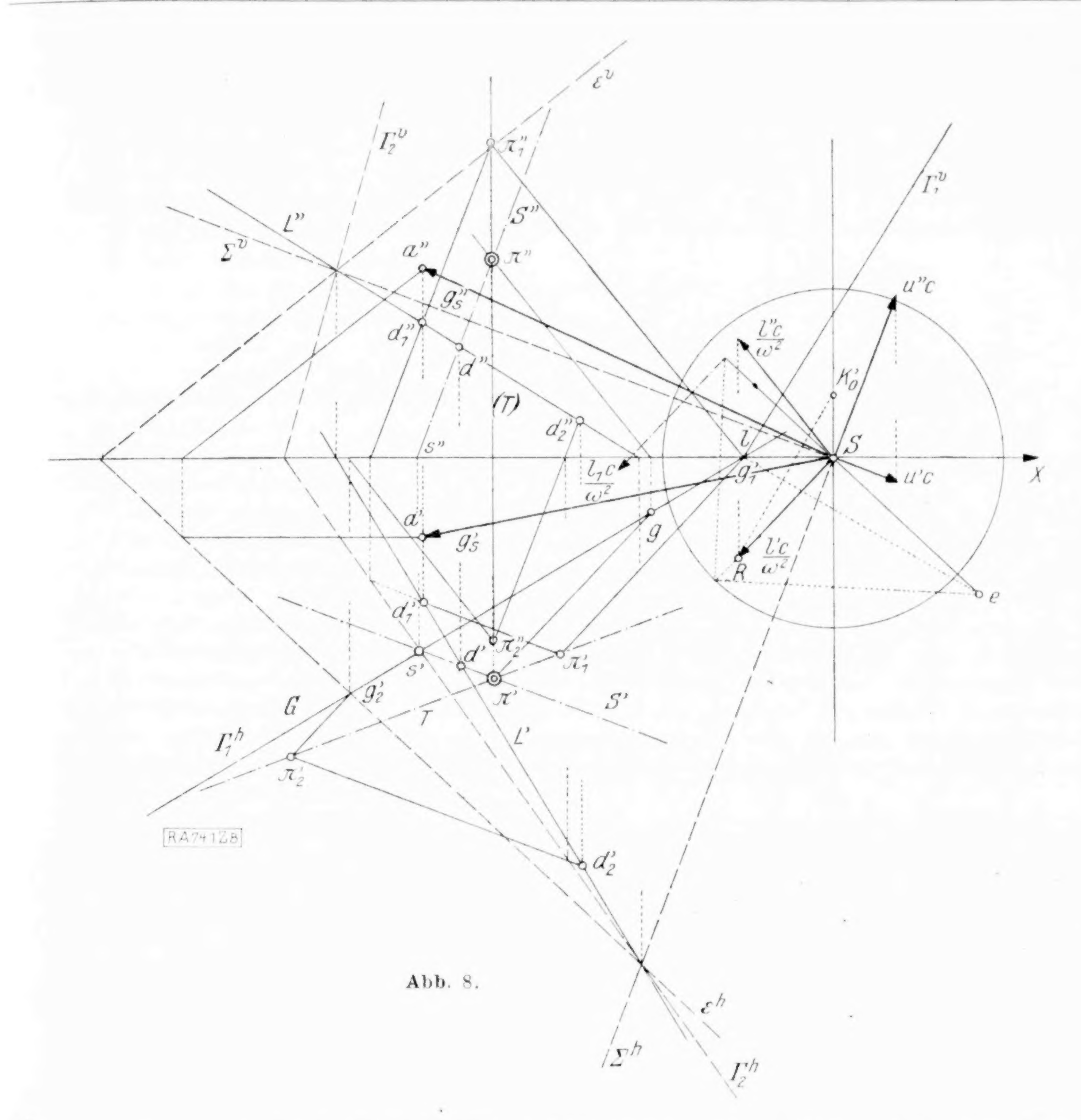


Abb. 8.

$\overrightarrow{Sk} = \mathfrak{g}_{s,2}$ eine zu $L$ parallele Gerade $K$, da $\overline{Sk}$ gleich und parallel zu $\overline{da}$. Konstruiert man nun für einen auf dem Grundriß $K'$ von $K$ beliebig angenommenen Punkt $k'$ (Abb. 9) den zugehörigen Punkt $g$ als Schnitt der Geraden $gS \perp Sk'$ und $eg \perp Rk'$, so liegen alle Punkte $g$, die den Punkten der Geraden $K'$ entsprechen, auf einer zu $K'$ senkrechten Geraden $G$. Denn es ist zufolge Konstruktion $\Delta Sk'R \sim Sge$; dreht man aber das Dreieck $Sk'R$ um $\pi/2$ in die Lage $Spq$, so daß $SR$ in $Sp$ zu liegen kommt, so beschreibt $q$ bei veränderlichem $k'$ eine zu $K'$ senkrechte Gerade durch $q$ und es muß wegen der Aehnlichkeit der Dreiecke $Spg$ und $Seg$ auch $g$ eine zu $K'$ (und daher auch zu $L'$) senkrechte Gerade beschreiben, die festgelegt ist durch den auf der $X$-Achse gelegenen Punkt $l$, für welchen $le \perp k_0' R$.

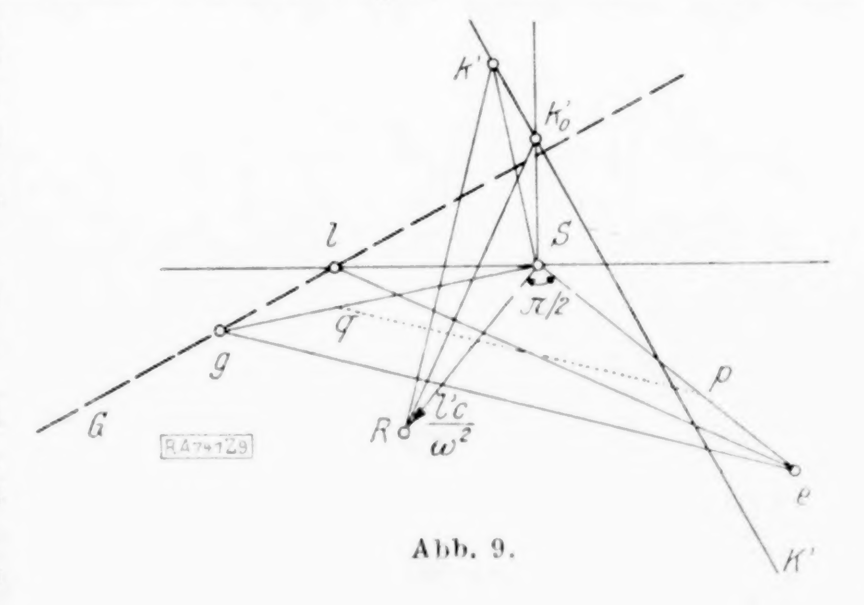


Abb. 9.

Nach Abbildung 4 ist nun der Pol $\pi$ der Schnittpunkt der beiden Geraden, die durch $d \parallel \mathfrak{u}$ und durch $g \parallel \mathfrak{l}$ gelegt werden. Wird daher durch die Gerade $L$ (als Ort aller Punkte $d$) eine Ebene

$\Gamma_2 \parallel \mathfrak{u}$, durch $G$ (als Ort aller $g$) eine Ebene $\Gamma_1 \parallel \mathfrak{l}$ gelegt (letztere ist natürlich auch senkrecht zu $L$), so liegt der Beschleunigungspol $\pi$ auf der Schnittgeraden $S$ beider Ebenen, die parallel zu $\mathfrak{u}$ sein muß. Einen zweiten Ort für $\pi$ liefert folgende Ueberlegung: Die Punkte $d'$ auf $L'$ und $g$ auf $G$ sind einander so zugeordnet, daß $a\,d \perp S\,g$. Da nach Früherem die Träger $L'$ und $G$ der beiden Punktreihen $d$ und $g$ aufeinander senkrecht stehen, so sind letztere perspektiv und und es ist daher das Erzeugnis der durch sie gelegten Parallelstrahlenbüschel mit den Richtungen $u'$ und $l'$ eine Gerade $T$, die durch die Punkte $\pi_1'$ und $\pi_2'$ (entsprechend den Annahmen $d_1'\,d_2'$) festgelegt ist. Der Schnitt von $T$ und $S$ liefert dann den Grundriß $\pi'$, der Aufriß $\pi''$ liegt auf $S''$.

Abb. 10.

Ist bei der Konstruktion von $\pi$ anstatt der Beschleunigung $\mathfrak{g}_s$ jene eines beliebigen Punktes $M$ gegeben, der nicht in der Bildebene liegt, so hat man, ehe die vorbeschriebene Konstruktion angewendet werden kann, zunächst aus dem Endpunkte $b$ des Beschleunigungsvektors $\mathfrak{g}_M$ den Punkt $a$ in der in Abb. 7 gezeigten Weise abzuleiten.

Abb. 10 zeigt die vereinfachte Konstruktion von $\pi$, wenn die Richtung $\mathfrak{u}$ der Drehachse senkrecht zur Bildebene ist. Dann fallen $L'$, $T$, $\varepsilon^h$, $\Gamma_2{}^h$ zusammen, $L''$ deckt sich mit der $X$-Achse. Die Gerade $S$ geht durch den Schnittpunkt $s'$ von $G$ mit $\varepsilon^h$ und steht senkrecht auf der Bildebene (weil $\parallel \mathfrak{u}$). Demnach liegt $\pi'$ in $s'$. Die Senkrechte durch $s$ zu $\pi'\,a'$ schneidet die Gerade $G$ in $g$, womit auch der Aufriß $\pi''$ bestimmt ist.

Wenn schließlich die Ebene durch die in $S$ angesetzten Vektoren $\mathfrak{u}$ und $\mathfrak{l}$ als Aufrißebene gewählt wird, dann gestaltet sich die Bestimmung von $\pi$ besonders einfach (Abb. 11). Die Ebene $\varepsilon \perp \mathfrak{l}$ durch $a$ ist dann senkrecht zur Aufrißebene, $e$ fällt in die $Y$-Achse und ist durch $f\,e \perp \mathfrak{l}''$ bestimmt.

Die Spur $\varepsilon^h$, die sich mit $L'$ deckt, ist bereits ein Ort für $\pi'$. Da aber $G$ als Ort

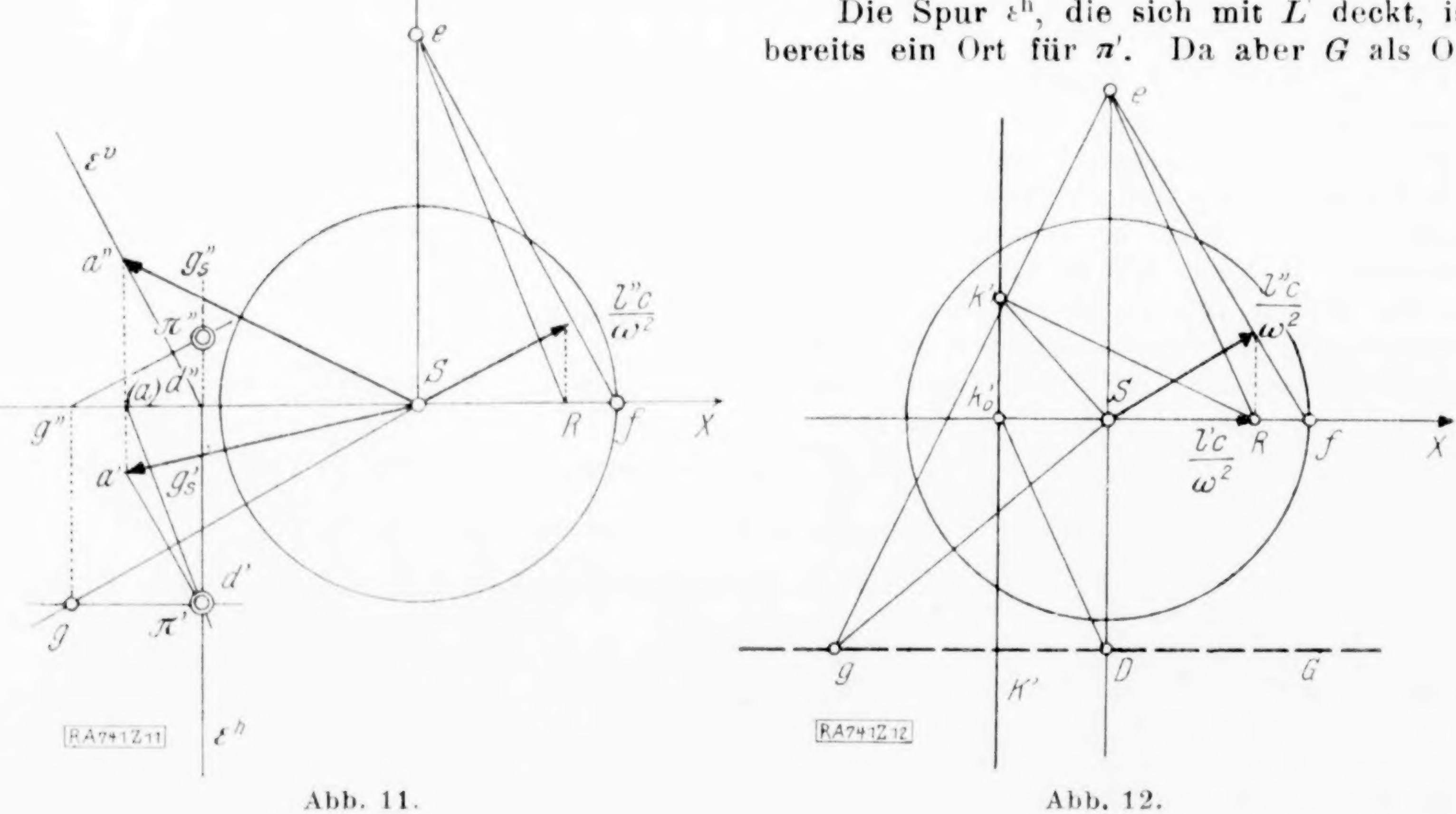


Abb. 11. Abb. 12.

der Punkte $g$ senkrecht zu $L'$ ist und $g\,\pi'$ ebenfalls senkrecht zu $L'$ steht, so ist auch die Gerade $G$ ein Ort für $\pi'$. Man erhält $\pi'$, indem man durch $(a)$ die Parallele zu $e\,R$ zieht und diese mit $\varepsilon^h$ in $\pi'$ schneidet.

Um dies zu beweisen, beachte man, daß nach Früherem die Punkte $k'$ auf einer zu $L'$ parallelen Graden $K'$ liegen, die durch $k_0'$ auf der $X$-Achse geht, wobei $k_0'S = (a)\,d''$ (Abb. 12). Konstruiert man zu einem willkürlichen Punkt $k'$ den zugehörigen Punkt $g$ als Schnitt der Geraden $e\,g \perp R\,k'$ und $S\,g \perp S\,k'$, so ist $\Delta\, g\, e\, S \sim k'\, S\, R$. Den Punkten $k'$ auf der Geraden $K'$ entsprechen daher die Punkte der Geraden $G$, die senkrecht zu $K'$ steht.

Nun ist

$$\overline{S\,g} : \overline{S\,e} = \overline{S\,k'} : \overline{S\,R}$$

und daher für die besondere Lage $k_0'$:

$$\overline{S\,D} : \overline{S\,e} = \overline{S\,k_0'} : \overline{S\,R}.$$

Hieraus folgt: $k_0'\,D \parallel e\,R$ und wegen $k_0'S = (a)\,d''$:

$$(a)\,\pi' \parallel k_0'\,D \parallel e\,R.$$

Mit $\pi'$ ist nun der endgiltige Punkt $g$ auf $G$ zufolge $S\,g \perp a\,\pi'$ bestimmt und damit auch $\pi''$, da $g''\,\pi'' \parallel \mathfrak{l}''$ sein muß.

Stübler[1]) gibt eine andere Konstruktion für den Beschleunigungspol $\pi$ aus $\mathfrak{b}_s$, $\mathfrak{u}$, $\mathfrak{l}$ an, wobei die Grundrißebene senkrecht zu $\mathfrak{u}$, die Aufrißebene senkrecht zu der zu $\mathfrak{u}$ senkrechten Komponente von $\mathfrak{l}$ gewählt wird. Bei der vorhin bewiesenen rein linearen Konstruktion für $\pi$ entfallen die bei Stübler nötigen Winkelübertragungen. Wird die Winkelbeschleunigung aus den äußeren Kräften und aus dem Zentralellipsoid des bewegten Körpers auf zeichnerischem Wege ermittelt, wobei zweckmäßig eine Hauptebene des Schwerpunktes zur Bildebene gemacht wird, dann haben die Vektoren $\mathfrak{w}$ und $\mathfrak{l}$ allgemeine Lagen, so daß bei Bestimmung von $\pi$ die gezeigte allgemeine Konstruktion Anwendung findet; die Einführung neuer Projektionsebenen zum Zwecke der Ermöglichung der wesentlich einfacheren Konstruktionen bei besonderer Lage von $\mathfrak{u}$ und $\mathfrak{l}$ bringt keine Abkürzung der Zeichenarbeit mit sich.

**6. Die Punkte des bewegten Systems** und die Endpunkte der von einem beliebigen festen Punkte aufgetragenen Beschleunigungsvektoren bilden zwei affine Systeme; die Affinität ist durch die Beschleunigungen von vier, nicht in einer Ebene liegenden Systempunkten festgelegt. Die Konstruktion der Beschleunigung eines fünften Systempunktes auf Grund dieser Zuordnung ist aber bei ganz allgemeiner Lage dieses Punktes nicht einfacher wie die unmittelbare Anwendung des in Abb. 7 gezeigten Verfahrens; die Ausnutzung der Affinität erweist sich aber dann als vorteilhaft, wenn der neue System-

Abb. 13.

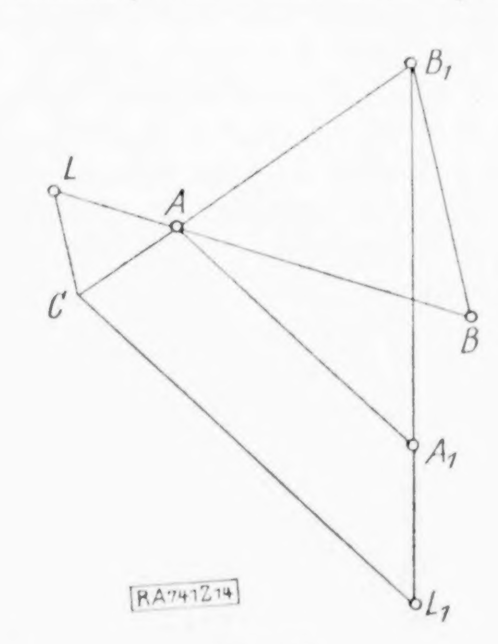



Abb. 14.

[1]) Jahresberichte d. Dtsch. Math.-Ver. 19 (1910), S. 179.

punkt z. B. mit drei bezüglich der Beschleunigungen bekannten Punkten in einer Ebene oder mit zweien auf einer Geraden liegt.

In Abb. 13 ist der Fall behandelt, daß die Beschleunigung $\mathfrak{b}_S$ von $S$ und $\mathfrak{b}_M$ von $M$ sowie der Beschleunigungspol $P$ gegeben sind; es soll die Beschleunigung des Punktes $D$ konstruiert werden, der in der Ebene $PSM$ liege. Die Beschleunigungen werden vom Punkte $S$ aufgetragen, so daß

$$\mathfrak{b}_S = \overrightarrow{S S_1}\,, \qquad \mathfrak{b}_M = \overrightarrow{S M_1}\,, \qquad \mathfrak{b}_P = \overrightarrow{S P_1} = 0.$$

Die Dreiecke $PSM$ und $P_1 S_1 M_1$ sind affin; es ist der dem Systempunkte $D$ zugehörige affine Punkt $D_1$ zu konstruieren. Dann ist

$$\mathfrak{b}_D = \overrightarrow{S D_1}.$$

Die Konstruktion läuft auf die wiederholte Lösung der folgenden Aufgabe hinaus: Gegeben 2 Punkte $AB$ (Abb. 14) mit den zugeordneten Punkten $A_1 B_1$. Es ist zu dem auf $AB$ liegenden Punkte $L$ der affin zugeordnete Punkt $L_1$ auf $A_1 B_1$ zu konstruieren. Dann muß sein:

$$LA : L_1 A_1 = AB : A_1 B_1.$$

Zieht man daher $AB_1$ und durch $L$ die Parallele zu $BB_1$ bis zum Schnitte $C$, so schneidet die durch $C$ gezogene Parallele zu $AA_1$ die Gerade $A_1 B_1$ im gesuchten Punkt $L_1$.

Verbindet man im Aufriß (Abb. 13) $D''$ mit $M''$ und bestimmt nach der eben gezeigten Konstruktion den zum Punkt $E$ (auf $SP$) zugeordneten Punkt $E_1$ (auf $S_1 P_1$), so liegt $D_1''$ auf $M_1'' E_1$ und ist durch die Zuordnung $ME$, $M_1 E_1$ bestimmt. Das Gleiche gilt für den Grundriß $D_1'$; hier genügt schon die Bestimmung des zu $F$ zugeordneten Punktes $F_1$, da $D_1'$ sowohl auf $M_1' F_1$ wie auf dem durch $D_1''$ gelegten Projektionsstrahl senkrecht zur $X$-achse liegen muß. 741

# Über die einfache und die allgemeine Geschwistermethode Weinbergs.

Von J. v. BEHR in Göttingen.

In der Erblichkeitsstatistik bedient man sich bei Untersuchung der im folgenden unter **1.** genau beschriebenen Aufgabe vielfach der sogenannten Weinbergschen Geschwistermethode. Da von der exakten Bestimmung der Vererbungswahrscheinlichkeiten sehr häufig die Aufklärung des ganzen Erbganges abhängig ist, so erhellt daraus einerseits die große Bedeutung dieser Methode, andrerseits aber auch die Notwendigkeit, sich über ihre Genauigkeit klar zu werden. Weinberg[1]) selbst hat niemals eine Mitteilung über die Genauigkeit seiner Methode veröffentlicht. Als erster hat — angeregt von F. Bernstein in Göttingen — den mittleren Fehler der Weinbergschen Methode Fz. R. Berwald, Stockholm[2]) berechnet. Allein der Berwaldschen Arbeit haften noch gewisse Mängel an. Sie behandelt erstens nur den Spezialfall der einfachen Geschwistermethode, das Urnenschema, das den mathematischen Rechnungen zu Grunde gelegt wird, ist nicht ganz einwandfrei; für den mittleren Fehler selbst wird nur eine angenäherte Lösung angegeben, ohne daß die Genauigkeit dieser Näherung berechnet wäre. Weinberg[3]) hat denn auch die Berwaldsche Arbeit angegriffen und behauptet, für den mittleren Fehler seiner Methode eine andere Formel gefunden zu haben, die er allerdings nie veröffentlicht hat[4]). Bei der Wichtigkeit des Problems schien es lohnend, die ganze Fragestellung von neuem zu untersuchen, zumal die komplizierten Rechnungen Berwalds eine Kontrolle kaum möglich machten. Es kommt also im folgenden auch darauf an, zu zeigen, wie die mathematischen Schwierigkeiten, mit denen Berwald — nach seinen eigenen Worten — zu kämpfen hatte, durch die einfachen Hilfsmittel der Differential- und Integralrechnung überwunden werden können.

[1]) W. Weinberg, Beiträge zur Theorie der Vererbung, Archiv für Rassen- und Gesellschaftsbiologie Bd. 9 (1912). — Auslesewirkungen bei biologisch-statistischen Problemen, ebenda Bd. 10 (1913).

[2]) Fz. R. Berwald, Ueber die Weinbergsche Geschwistermethode, Skandinavisk Actuarietidskrift Heft 1 u. 2 (1924).

[3]) W. Weinberg, Methoden und Technik der Statistik, Handbuch der sozialen Hygiene Bd. 1 (1925), S. 99 u. 133.

[4]) Anm. des Verfassers bei der Korrektur: Weinberg hat neuerdings in der Actuarietidskrift (1926) eine Formel ohne Beweis mitgeteilt.

**1. Die Aufgabe.** Wir wollen den Erbgang einer bestimmten Eigenschaft kennen lernen, die in drei Nuancen oder Phänotypen $A$, $B$, $C$ auftritt, und wollen prüfen, ob die Vererbung sich nach einem monohybriden Mendelschen Schema vollzieht. Was dies bedeutet, lehrt die folgende Zahlentafel:

| | $A$ | $B$ | $C$ |
|---|---|---|---|
| $A$ . . . . . | $A$ | $C$ | 50 vH $A$ 50 vH $C$ |
| $B$ . . . . . | $C$ | $B$ | 50 vH $B$ 50 vH $C$ |
| $C$ . . . . . | 50 vH $A$ 50 vH $C$ | 50 vH $B$ 50 vH $C$ | 25 vH $A$ 25 vH $B$ 50 vH $C$ |

die z. B. zeigt, daß aus einer Kreuzung der Type $B$ mit der Type $C$ eine Nachkommenschaft resultiert, die zur Hälfte der Type $B$, zur Hälfte der Type $C$ angehört. Aus der Zahlentafel geht auch hervor, daß bei einer geschlechtlichen Kreuzung der Typen $C \times C$ mit einer Wahrscheinlichkeit von 25 vH der Typ $A$, mit einer Wahrscheinlichkeit von 25 vH der Typ $B$, mit einer Wahrscheinlichkeit von 50 vH der Typ $C$ zu erwarten ist. Sind alle drei Typen wohl unterscheidbar, so können wir aus einer Population z. B. 100 Familien heraussuchen, in denen beide Eltern dem Typ $C$ zugehören. Bezeichnet $a_i$ die Anzahl der Kinder vom Typ $A$ in der $i$-ten Familie ($i = 1, 2, \ldots 100$), $s_i$ die Anzahl aller Kinder der $i$-ten Familie, so würde man natürlich $\sum_{i=1}^{100} a_i : \sum_{i=1}^{100} s_i$ bilden und den so erhaltenen Wert mit dem laut Zahlentafel zu erwartenden Wert von 0,25 vergleichen. Dies ist der einfachste Fall, über den nichts mehr hinzuzufügen ist. Eine Schwierigkeit tritt erst ein, wenn die Typen $B$ und $C$ wohl genotypisch (biologisch), aber nicht phänotypisch (dem Aussehen nach) verschieden sind.

Wir erhalten das hierzu gehörige Erbschema, indem wir in der vorstehenden Zahlentafel die Buchstaben $B$ und $C$ durch einen Buchstaben $D$ ersetzen. Nun sind wir natürlich nicht mehr in der Lage, wie zuvor ohne weiteres aus einer Population 100 Familien vom Typus $C \times C$ herauszugreifen. Sehen wir aber unser Erbschema an, so erkennen wir, daß von den Elternpaaren des Phänotypus $D \times D$ die mit dem Genotypus $C \times C$ die einzigen sind, die auch Kinder vom Typ $A$ hervorbringen können. Wir greifen also jetzt aus der Population 100 Elternpaare vom Phänotyp $D \times D$ heraus, deren jedes mindestens ein Kind vom Typ $A$ hat, und wir wissen, daß die 100 Elternpaare sämtlich — wie im ersten Fall — dem Genotyp $C \times C$ zugehören. Würde man jetzt wieder den Quotienten $\sum_{i=1}^{100} a_i : \sum_{i=1}^{100} s_i$ bilden, so wäre der Erwartungswert dieses Quotienten keineswegs — wie zuvor — gleich 25 vH. Man sieht das sehr leicht ein, wenn man beispielsweise alle $s_i$ einander gleich, also gleich $s$ annimmt. Dann geht unser Quotient über in $\sum_{i=1}^{100} a_i : 100 \cdot s$. Im ersten Falle ist $a_i$ der Werte $0, 1, 2 \ldots s$ fähig, im zweiten Falle nur der Werte $1, 2, \ldots s$. Im zweiten Falle muß also der Erwartungswert des Quotienten größer sein als 25 vH. Es mag hier erwähnt werden, das der kompliziertere Fall (dominanter Erbgang) der weitaus häufigere in der Erblichkeitsstatistik ist. Eine grundsätzliche Schwierigkeit liegt hier nun keineswegs vor. Man könnte sehr wohl auch in dem komplizierteren Falle den Erwartungswert des Quotienten $\sum a_i : \sum s_i$ theoretisch berechnen, um ihn mit dem beobachteten Werte des Quotienten zu vergleichen. Diese Methode wäre höchst wahrscheinlich sehr genau; der Biologe würde sie indessen nur mit Hilfe einer ausführlichen Tabelle handhaben können. Weinberg hat nun einen andern Weg eingeschlagen. Sein Gedanke war der, eine solche Funktion der $a_i$, $s_i$ zu bilden, daß sich als theoretischer Erwartungswert wieder 25 vH ergibt. Dieser Gedanke ist gewiß sehr einfach; und dieser Einfachheit verdankt die Weinbergsche Methode ihre weite Verbreitung. Weinberg selbst ist auf die Lösung, wohl von anschaulichen Ueberlegungen ausgehend, gekommen, die auch den Namen »Geschwistermethode« erklären. Doch wollen wir hierauf nicht eingehen, sondern uns von jetzt ab nur an den mathematischen Kern des Problems halten. Wir beginnen mit dem Spezialfall konstanter Kinderzahl ($s_i = s$), den die »einfache« Geschwistermethode behandelt.

**2. Die Weinbergsche Behauptung.** Dem eben dargelegten Erblichkeitsproblem entspricht folgendes Urnenschema. Man denke sich aus einer Urne, die mit weißen und schwarzen Kugeln im Verhältnis $p : q$ gemischt ist, wobei

$$p + q = 1 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (1)$$

ist, $F$ Serien gezogen, von denen jede $s$ Ziehungen umfaßt, und zwar so, daß eine gezogene Kugel, bevor die nächste gezogen, wieder zurückgelegt wird. Hierbei ist $s$ eine bestimmte ganze Zahl; $F$ dagegen ist nicht bestimmt, sondern vom Zufall abhängig und wird auf folgende Weise definiert. Diejenigen Serien, in denen alle Kugeln schwarz sind, werden eliminiert und nicht gezählt; in den übrigen Serien kommt also mindestens eine weiße Kugel vor. Die Ziehung wird so lange fortgesetzt, bis $n$ Serien vorhanden sind, in denen also mindestens eine weiße Kugel vorkommt. Hierbei ist $n$ eine ganz bestimmte Zahl. Man sieht also, daß die Größe $F$, die oben eingeführt ist, zur Erklärung des vorliegenden Urnenschemas völlig entbehrlich ist. Wenn man die Ziehung von $n$ solchen Serien, wie sie eben beschrieben worden ist, wiederholen wollte, so würde $F$ von Fall zu Fall schwanken. Wenn $F$ trotzdem eingeführt worden ist, so geschah es, um den Anschluß an die Untersuchungen von R. Berwald[2]) zu finden. In dem Urnenschema, das Berwald der mathematischen Analyse zu Grunde legt, ist $F$ festgehalten, also die Anzahl aller Serienziehungen konstant, während $n$ also die Anzahl der Serien, von denen jede mindestens eine weiße Kugel enthält, zufallsmäßig schwankt. Allein gegen die Berwaldsche Auffassung sind einige Bedenken geltend zu machen. Es ist zwar richtig, daß ein einzelner — d. h. sich nicht wiederholender — natürlicher Vorgang, der durch ein Urnenschema $U_1$ erklärt werden kann, häufig auch durch ein Urnenschema $U_2$ erklärt werden kann, wobei $U_1$ ein Spezialfall von $U_2$ ist. Das Urnenschema jedoch hat als wahrscheinlichkeitstheoretischer Begriff eine unmittelbare Beziehung zur Erfahrung. Ein Urnenschema ist als Hypothese um so einwandfreier, je vollkommener es von dem Statistiker realisiert werden kann. Der Erblichkeitsstatistiker kennt aber in den Fällen, um die es sich hier handelt, immer $n$, niemals $F$. Er hat es daher gar nicht in der Hand, bei wiederholten statistischen Aufnahmen, die doch bei der Bildung von Erwartungswerten als »tatsächlich« möglich (ob sie wirklich geschehen, ist natürlich belanglos) vorgestellt werden, $F$ konstant zu erhalten; $n$ dagegen kann konstant gehalten werden. Und selbst wenn man annehmen wollte, daß der Statistiker durch technische Schwierigkeiten verhindert sein könnte, bei wiederholten Versuchen stets dieselbe Serienzahl $n$ zu erreichen, so würde $n$ doch niemals in der Weise schwanken, wie es durch das Berwaldsche Urnenschema postuliert wird; $n$ würde z. B. niemals so kleine Werte wie 3, 2, 1 oder gar 0 [1]) annehmen, die Berwald von seinem Standpunkte aus natürlich mit Recht zuläßt. Aber eine Komplikation wie die eben erwähnte ist garnicht erforderlich. Das Urnenschema mit konstantem $n$ ist derart, daß sich ihm der Erblichkeitsstatistiker anpassen kann. Aber wenn man auch das Berwaldsche Urnenschema aus Gründen tatsächlicher Art ablehnen muß, so folgt doch nicht, daß man ihm nicht eine formale Bedeutung zusprechen könnte; ja, es kann sogar ein Gebot der mathematischen Klugheit sein, den tatsächlichen Verhältnissen zu Gunsten einer einfachen mathematischen Behandlung etwas Gewalt anzutun. Aber freilich bleibt dann die Aufgabe, den hierdurch begangenen Fehler zu bestimmen. Es wird Gelegenheit sein, weiter unten auf diese Dinge zurückzukommen. Wir wollen unseren Untersuchungen stets das exakte Schema mit konstantem $n$ zu Grunde legen, gelegentlich aber auch das andre berücksichtigen, um die Resultate vergleichen zu können. Die Aufgabe, um die es sich handelt, ist folgende: $i$ bezeichne die $i$-te Serie ($i = 1, 2, 3 \ldots n$), $a_i$ bezeichne die Anzahl der weißen Kugeln, die in der $i$-ten Serie gezogen wurden; dann ist $a_i$ der Werte fähig $a_i = 1, 2, \ldots s$. $a_i$ ist niemals gleich null, weil ja die Serien mit 0 weißen, also nur schwarzen Kugeln eliminiert sind. Nun soll aus den statistisch gegebenen Werten von $s$, $n$, $a_i$ das Mischungsverhältnis $p:q$, in dem die Kugeln in der Urne enthalten sind, bestimmt werden. Die Behauptung Weinbergs lautet nun: Es ist $p$ der Erwartungswert von

$$\frac{a_1(a_1-1) + a_2(a_2-1) + a_3(a_3-1) + \ldots a_n(a_n-1)}{(a_1 + a_2 + a_3 + \ldots a_n)\cdot(s-1)} \quad \ldots\ldots \quad (2).$$

Wer in der Berechnung von Erwartungswerten einigermaßen bewandert ist, sieht sofort, daß jedenfalls für große $n$ Gl. (2) berechtigt ist. Die Frage ist nur, wie groß $n$ sein muß, damit (2) für praktische Zwecke brauchbar wird.

**3. Berechnung des Erwartungswertes.** Um den Erwartungswert von (2) zu berechnen, verfahren wir wie folgt. Die dem Ereignis $a_i$ zukommende Wahrscheinlichkeit

[1]) Es sei hier ausdrücklich hervorgehoben, weil es später noch gebraucht werden wird, daß Berwald dort, wo er die Weinbergsche Geschwistermethode behandelt, den Fall $n = 0$ (bei ihm $f_0 = F$) nicht ausschließt. Es geht dies deutlich aus seinem Ansatz (s. loc. cit. S. 99. $E(K''') = F \cdot k \cdot (k-1) \cdot p$ und $E(K_r''') = F \cdot k \cdot (k-1)\, p^2$) hervor.

sei $u(a_i)$. Dann ist also $u(a_i)$ die Wahrscheinlichkeit dafür, daß die $i$-te von den $n$ Serien als Ziehungsresultat ergibt $a_i$ weiße und $(s - a_i)$ schwarze Kugeln. Da nun die $i$-te Serie von den vorhergehenden völlig unabhängig ist, so ist $u(a_i)$ die Wahrscheinlichkeit dafür, daß unter $s$ Kugeln, die einer in bestimmter Weise gefüllten Urne auf die oben angegebene Art entnommen werden, sich $a_i$ weiße und $(s - a_i)$ schwarze finden, wobei zu beachten ist, daß das Ziehungsresultat »0 weiße und $s$ schwarze Kugeln« als nicht geschehen betrachtet wird und daher nicht zu den »möglichen Fällen« gehört. Um diese bedingte Wahrscheinlichkeit zu finden, vergleiche man sie mit der unbedingten Wahrscheinlichkeit $\bar{u}(a_i)$, die also die Wahrscheinlichkeit dafür bedeutet, daß schlechthin unter $s$ Kugeln, die derselben Urne entnommen werden, sich $a_i$ weiße und $(s - a_i)$ schwarze finden. Bekanntlich ist

$$\bar{u}(a_i) = \binom{s}{a_i} p^{a_i} \cdot q^{s-a_i} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3).$$

Denkt man nun an die übliche Definition der Wahrscheinlichkeit als »Quotient der günstigen und möglichen Fälle«, so erkennt man, daß $u(a_i)$ und $\bar{u}(a_i)$ denselben Zähler, aber verschiedene Nenner haben. Da nun die $u(a_i)$ untereinander denselben Nenner haben und desgleichen die $\bar{u}(a_i)$ für sich, so muß für alle $a_i = 1, 2, 3, \ldots s$ die Gleichung bestehen:

$$u(a_i) = \bar{u}(a_i) \cdot c\,,$$

wobei $c$ bald bestimmt werden wird. Denn da

$$\sum_{a_i}^{1,s} u(a_i) = 1 = c \cdot \sum_{a_i}^{1,s} \bar{u}(a_i) = (\text{nach } 3) = c \cdot \sum_{a_i}^{1,s} \binom{s}{a_i} \cdot p^{a_i} q^{s-a_i} = c \cdot (1 - q^s) \quad . \quad (4),$$

so folgt:

$$c = \frac{1}{1 - q^s} \text{ und } u(a_i) = \binom{s}{a_i} \frac{p^{a_i} \cdot q^{s-a_i}}{1 - q^s} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5).$$

Dann ist unter dem Erwartungswert von (2), wenn mit $A$ die Summe $a_1 + a_2 + \ldots a_n$ bezeichnet wird, offenbar die $n$-fache Summe zu verstehen:

$$\sum_{a_1}^{1,s} \sum_{a_2}^{1,s} \ldots \sum_{a_n}^{1,s} \frac{a_1(a_1 - 1) + a_2(a_2 - 1) + \ldots a_n(a_n - 1)}{A(s-1)} \cdot \binom{s}{a_1} \cdot \binom{s}{a_2} \ldots \binom{s}{a_n} \cdot \frac{p^A \cdot q^{ns-A}}{(1 - q^s)^n} = E(p,q)^{1)} \quad (6).$$

---

[1]) Anmerkung des Herausgebers. Ich halte weder die in Abschnitt **3** gegebene Ableitung von Gl. (6) für zwingend, noch kann ich den Ausführungen des Verfassers in **2** und **4**, wonach eine mehr oder weniger willkürliche »Wahl eines Urnenschemas« offen stehe, zustimmen. Dagegen läßt sich Gl. (6) des Textes, und damit das Spätere, wie folgt rechtfertigen.

Werden $m$ Elternpaare vom Typus $D\,D$ beobachtet, so befinden sich unter ihnen nur etwa $m - m_0$, die dem Typus $C\,C$ angehören, die also mit der Wahrscheinlichkeit

$$u_\nu = \binom{s}{\nu} p^\nu q^{s-\nu} \qquad (\nu = 0, 1, 2 \ldots s) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (a),$$

$\nu$ Kinder vom Typus $A$ hervorbringen können. Die Wahrscheinlichkeit dafür, daß unter den beobachteten Familien $x_0$ bzw. $x_1, x_2 \ldots x_s$ Familien 0 bzw. $1, 2 \ldots s$ Kinder vom $A$-Typus besitzen, ist daher nach der Polynomialformel

$$\frac{(m - m_0)!}{(x_0 - m_0)!\, x_1!\, x_2! \ldots x_s!} u_0^{x_0 - m_0} u_1^{x_1} u_2^{x_2} \ldots u_s^{x_s} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (b).$$

Die Wahrscheinlichkeit dafür, daß $n$ Familien mindestens ein Kind vom $A$-Typus aufweisen, ist ebenso

$$\frac{(m - m_0)!}{(m - n - m_0)!\, n!} u_0^{m-n-m_0} (1 - u_0)^n \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (c).$$

Dividiert man (b) durch (c), so erhält man nach der Teilungsregel die Wahrscheinlichkeit dafür, daß bei einer Beobachtungsreihe, die genau $n$ Familien mit mindestens einem $A$-Kind aufweist, die Aufteilung $x_0, x_1, x_2, \ldots x_s$ besteht; dabei ist natürlich $x_1 + x_2 + \ldots x_s = m - x_0 = n$ zu setzen. Die Division ergibt bei Beachtung von (a) mit $\sum \nu x_\nu = A$

$$w(x_1 \ldots x_s) = \frac{p^A q^{sn-A}}{(1 - q^s)^n} \cdot \frac{n!}{x_1!\, x_2! \ldots x_s!} \binom{s}{1}^{x_1} \binom{s}{2}^{x_2} \ldots \binom{s}{s}^{x_3} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (d).$$

Dieser Ausdruck enthält die der Beobachtung unzugänglichen Größen $m$ und $m_0$ nicht mehr, von denen daher auch der Erwartungswert jeder beliebigen Funktion $f(x_1, x_2 \ldots x_s)$

$$E(f) = \sum_{x_\nu} f(x_1 \ldots x_s) \cdot w(x_1 \ldots x_s) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (e)$$

unabhängig ist. Drückt man das Beobachtungsergebnis statt durch $x_\nu$ durch die Zahlenreihe $a_1, a_2 \ldots a_n$ aus und bezeichnet mit $f$ den Ausdruck (2), so folgt aus (d) und (e) die Gl. (6) des Textes. R. v. Mises.

Zerlegt man den Zähler in seine $n$ Summanden, so erhält man $n$ $n$-fache Summen, die aber wegen der Vertauschbarkeit der Summationsfolge alle einander gleich sind, so daß:

$$E(p,q) = n \cdot \sum_{a_1}^{1,s} \sum_{a_2}^{1,s} \dots \sum_{a_n}^{1,s} \frac{a_1(a_1-1)}{A(s-1)} \cdot \frac{p^A \cdot q^{ns-A}}{(1-q^s)^n} \cdot \binom{s}{a_1} \cdot \binom{s}{a_2} \dots \binom{s}{a_n}$$

Hierbei werde von der Gl. (1) $p + q = 1$ einstweilen abgesehen, und $E(p,q)$ also als Funktion zweier unabhängiger Variablen aufgefaßt. Setzt man

$$E(p,q = \frac{I(p,q)}{(1-q^s)^n} \quad \dots \dots \dots \dots \quad (7),$$

so wird

$$I(p,q) = n \cdot \sum_{a_1}^{1,s} \sum_{a_2}^{1,s} \dots \sum_{a_n}^{1,s} \frac{a_1(a_1-1)}{A(s-1)} \cdot \binom{s}{a_1} \cdot \binom{s}{a_2} \dots \binom{s}{a_n} \cdot p^A q^{ns-A} \quad \dots \quad (8).$$

Diese Funktion zweier unabhängiger Variablen differenziert man partiell nach $p$, multipliziert sofort mit $p$ und erhält:

$$p \cdot \frac{\partial I}{\partial p} = n \cdot \sum_{a_1}^{1,s} \sum_{a_2}^{1,s} \dots \sum_{a_n}^{1,s} \frac{a_1(a_1-1)}{(s-1)} \cdot \binom{s}{a_1} \cdot \binom{s}{a_2} \dots \binom{s}{a_n} \cdot p^{a_1+a_2+\dots a_n} \cdot q^{n \cdot s - a_1 - a_2 \dots a_n} \quad (9).$$

Die Summation rechts ist ausführbar. Man summiert zuerst über $a_n$, dann $a_{n-1}$, $a_{n-2}$, ... schließlich $a_1$. Bekanntlich ist nach der Binomialformel:

$$\sum_{a_i}^{1,s} \binom{s}{a_i} p^{a_i} q^{s-a_i} = (p+q)^s - q^s \quad \dots \dots \dots \quad (10).$$

Differenziert man (10) zweimal partiell nach $p$ und multipliziert mit $p^2$, so folgt

$$\sum_{a_i}^{2,s} a_i(a_i-1)\binom{s}{a_i} p^{a_i} q^{s-a_i} = p^2 \cdot s(s-1)(p+q)^{s-2} = \sum_{a_i}^{1,s} a_i(a_i-1)\binom{s}{a_i} p^{a_i} q^{s-a_i} \quad (11).$$

Führt man jetzt in (9) die Summation in der angegebenen Reihenfolge aus, so folgt mit Rücksicht auf (10) und (11)

$$\frac{\partial I}{\partial p} = n\{(p+q)^s - q^s\}^{n-1} \cdot p \cdot s(p+q)^{s-2},$$

daher

$$I = \int_0^p n \cdot \{(p+q)^s - q^s\}^{n-1} \cdot p \cdot s(p+q)^{s-2}\, dp \quad \dots \quad (12).$$

Die untere Integrationsgrenze ist richtig gewählt, weil nach (8) $I(0,q) = 0$ werden muß; denn der Exponent von $p$ in (8), $A = a_1 + a_2 \dots a_n$ ist stets $\geqq n$. Trägt man nach der Integration der Beziehung $p = 1 - q$ Rechnung und schreibt für das allein stehende $p$ im Integranden $p + q - q$, so entsteht

$$I(1-q,q) = \int_0^{1-q} n \cdot \{(p+q)^s - q^s\}^{n-1} \cdot s(p+q)^{s-1}\, dp$$
$$- q \cdot \int_0^{1-q} n \cdot \{(p+q)^s - q^s\}^{n-1} \cdot s(p+q)^{s-2}\, dp \quad \dots \quad (13).$$

Das erste Integral läßt sich unmittelbar angeben, das zweite werde durch $J_1$ bezeichnet:

$$J(1-q,q) = \{(p+q)^s - q^s\}^n \Big|_0^{1-q} - q \cdot J_1 = (1-q^s)^n - q \cdot J_1 \quad \dots \quad (14).$$

Wir behandeln den allgemeineren Integralausdruck

$$J_k = \int_0^{1-q} n \cdot \{(p+q)^s - q^s\}^{n-1} \cdot s \cdot (p+q)^{s-1-k}\, dp \quad \dots \quad (15)$$

in den wir $(p+q)^s = y$ substituieren, so daß

$$J_k = \int_{q^s}^{1} n \cdot (y - q^s)^{n-1} \cdot y^{-k/s}\, dy \quad \dots \dots \dots \quad (16).$$

Es wird hintereinander zweimal partiell integriert

$$J_k = (y-q^s)^n y^{-k/s} - \frac{(y-q^s)^{n+1}}{(n+1)} \cdot \frac{-k}{s} \cdot y^{-k/s-1}\Big|_{q^s}^{1} + \int_{q^s}^{1} \frac{(y-q^s)^{n+1}}{n+1} \cdot \frac{k}{s} \cdot \frac{k+s}{s} \cdot y^{-k/s-2}\, dy$$

$$= J_k = (1-q^s)^n + \frac{(1-q^s)^{n+1}}{n+1} \cdot \frac{k}{s} + \frac{k}{s} \cdot \frac{k+s}{s} \cdot \int_{q^s}^{1} \frac{(y-q^s)^{n+1}}{n+1} \cdot y^{-k/s-2}\, dy \quad \dots \quad (17).$$

Wendet man auf das letzte Integral den ersten Mittelwertsatz der Integralrechnung an, so folgt:

$$J_k = (1 - q^s)^n + \frac{(1 - q^s)^{n+1}}{n+1} \cdot \frac{k}{s} + \frac{(1 - q^s)^{n+2}}{(n+1)(n+2)} \cdot \frac{k}{s} \cdot \frac{k+s}{s} \cdot \frac{1}{t_k^{k+2s}}, \quad \text{wo } q \leqq t_k \leqq 1 \text{ ist} \qquad (18).$$

Also für $k = 1$:

$$J_1 = (1 - q^s)^n + \frac{(1 - q^s)^{n+1}}{n+1} \cdot \frac{1}{s} + \frac{(1 - q^s)^{n+2}}{(n+1)(n+2)} \cdot \frac{1+s}{s^2} \cdot \frac{1}{t_1^{2s+1}}, \quad \text{wo } q \leqq t_1 \leqq 1 \text{ ist.}$$

Dieser Wert wird in (14) eingesetzt:

$$J(1 - q, q) = p(1 - q^s)^n - q\left[\frac{(1 - q^s)^{n+1}}{s(n+1)} + \frac{(1 - q^s)^{n+2}}{(n+1)(n+2)} \cdot \frac{1+s}{s^2 \cdot t_1^{2s+1}}\right]$$

und mit Rücksicht auf (7) und (6) folgt:

$$E(1 - q, q) = p - q \cdot \left[\frac{1 - q^s}{s(n+1)} + \frac{(1 - q^s)^2}{(n+1)(n+2)} \cdot \frac{1+s}{s^2 \cdot t_1^{2s+1}}\right], \quad \text{wobei } q \leqq t_1 \leqq 1 \text{ ist} \qquad (19).$$

Der Erwartungswert $E$ des Ausdruckes (2) geht also in der Tat mit wachsendem $n$ gegen $p$. Damit ist der erste Teil der von uns exponierten Aufgabe erledigt.

**4. Vergleich mit dem Berwaldschen Ergebnis.** In welchem Zusammenhang steht nun dieses Ergebnis mit den Resultaten Berwalds? (S. loc. cit. pag. 102). Bei Berwald ist $n$ keine feste Zahl, sondern vom Zufall abhängig. Wenn man in der eingangs beschriebenen Weise $F$ Serien zieht, so ist die Wahrscheinlichkeit, $n$ Serien, von denen jede mindestens eine weiße Kugel enthält, zu ziehen, gleich

$$\binom{F}{n}(1 - q^s)^n \cdot (q^s)^{F-n} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (20),$$

denn die Wahrscheinlichkeit, eine Serie mit nur schwarzen Kugeln zu ziehen, ist $q^s$, also $1 - q^s$ die Wahrscheinlichkeit, eine Serie mit mindestens einer weißen Kugel zu ziehen. Der in (19) angegebene Erwartungswert, $E(1 - q, q)$, unterliegt der Voraussetzung, daß $n$ Serien der letzteren Art gezogen wurden, und die Wahrscheinlichkeit, daß diese Voraussetzung erfüllt wird, ist durch (20) angegeben. Ist $E'$ der Erwartungswert von (2) nach der Berwaldschen Hypothese, dann ist hiernach

$$E' = \sum_n^{0,F} E(1 - q, q) \cdot \binom{F}{n} \cdot (1 - q^s)^n (q^s)^{F-n} \quad \ldots\ldots \quad (21)..$$

Mit Rücksicht auf (7) und (12) ist

$$E(1 - q, q) = \frac{1}{(1 - q^s)^n} \cdot \int_0^{1-q} n \cdot \{(p+q)^s - q^s\}^{n-1} \cdot p \cdot s \cdot (p+q)^{s-2}\, d\,p.$$

Dieser Wert wird in (21) eingesetzt

$$E' = \int_0^{1-q} \sum_n^{0,F} \binom{F}{n} \cdot n\,\{(p+q)^s - q^s\}^{n-1} \cdot (q^s)^{F-n} \cdot s \cdot p\,(p+q)^{s-2}\, d\,p \qquad (22).$$

Nun folgt aus $(a+b)^F = \sum_n^{0,F} \binom{F}{n} a^n b^{F-n}$ durch partielle Differenziation nach $a$

$$F \cdot (a+b)^{F-1} = \sum_n^{0,F} \cdot \binom{F}{n} \cdot n \cdot a^{n-1} b^{F-n} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (23).$$

Wendet man (23) auf (22) an, so wird

$$E' = \int_0^{1-q} F(p+q)^{s\cdot(F-1)} \cdot s \cdot p\,(p+q)^{s-2}\, d\,p = \int_0^{1-q} s \cdot F(p+q)^{F\cdot s-1}\, dp - q \int_0^{1-q} F \cdot s\,(p+q)^{F\cdot s-2}\, dp$$

$$= 1 - q^{F\cdot s} - q \cdot \frac{F \cdot s}{F \cdot s - 1}(1 - q^{F\cdot s-1}) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (24).$$

Setzt man wieder $1 - q = p$, so folgt

$$E' = p - \frac{q}{F \cdot s - 1} \cdot (1 - q^{F\cdot s-1}) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (25)$$

und dies ist keine asymptotische Darstellung, sondern eine exakte Gleichung. Dieses Resultat (25) läßt sich aber viel schneller herleiten, wenn man nicht den Umweg über (12) macht. Wenn $F$ Serien gezogen werden, wie oben beschrieben, so bezeichne

$b_\nu$ ($\nu = 1, 2, 3, \ldots F$) die Anzahl der weißen Kugeln, die sich bei der $\nu$-ten Serie ergeben. Dann ist das Berwaldsche $E'$ nichts andres als der Erwartungswert von

$$\frac{b_1(b_1-1)+b_2\cdot(b_2-1)+\ldots b_F\cdot(b_F-1)}{(b_1+b_2+b_3+\ldots+b_F)\cdot(s-1)}\cdot(b_\nu=0,1,2,\ldots s).$$

Zu beachten ist, daß $b_\nu$ im Gegensatz zu dem früher benutzten $a_i$ auch den Wert 0 annehmen kann. Es muß also eine Festsetzung über den Wert des vorstehenden Quotienten getroffen werden für den Fall, daß alle $b_\nu = 0$ sind. Da aber dies in unserer früheren Bezeichnung dem Falle $n = 0$ entspricht s. (12), und (12) dann $J = 0$ liefert, und wegen (7) dann auch $E$, also der Erwartungswert des vorstehenden Quotienten für $n = 0$, gleich null wird, so soll der obige Quotient, wenn alle $b_\nu = 0$ sind, den Wert 0 haben. Da die Wahrscheinlichkeit, daß sich bei der $\nu$-ten Serie $b_\nu$ weiße und $(s - b_\nu)$ schwarze Kugeln ergeben, gleich $\binom{s}{b_\nu}\cdot p^{b_\nu}\cdot q^{s-b_\nu}$ ist, so wird

$$E' = \sum_{b_1}^{0,s}\sum_{b_2}^{0,s}\ldots\sum_{b_F}^{0,s}\frac{b_1(b_1-1)+b_2(b_2-1)+\ldots b_F\cdot(b_F-1)}{(b_1+b_2+b_3+\ldots b_F)\cdot(s-1)}\cdot\binom{s}{b_1}\cdot\binom{s}{b_2}\ldots\binom{s}{b_F}$$
$$\cdot p^{b_1+b_2+\ldots b_F}\cdot q^{F\cdot s-b_1-b_2\ldots b_F} = E'(p,q) \quad \ldots\ldots \quad (26).$$

Es erscheinen also hier im Gegensatz zu (6) die gewöhnlichen Bernoulli-Wahrscheinlichkeiten, da ja Serien mit 0 weißen Kugeln keineswegs ausgeschlossen sind. Faßt man in (26) $p$ und $q$ als unabhängige Variable auf, differenziert partiell nach $p$ und multipliziert gleich wieder mit $p$, so folgt:

$$p\cdot\frac{\partial E'}{\partial p} = \sum_{b_1}^{0,s}\sum_{b_2}^{0,s}\ldots\sum_{b_F}^{0,s}\left\{\frac{b_1(b_1-1)+b_2(b_2-1)+\ldots+b_F\cdot(b_F-1)}{(s-1)}\right\}\cdot\binom{s}{b_1}\cdot\binom{s}{b_2}\ldots\binom{s}{b_F}$$
$$\cdot p^{b_1+b_2+\ldots b_F}\cdot q^{F\cdot s-b_1-b_2\ldots b_F}$$

Zerlegt man die geschweifte Klammer in ihre $F$ Summanden, so hat man $F$ $F$-fache Summen, die alle einander gleich sind

$$p\cdot\frac{\partial E'}{\partial p} = F\cdot\sum_{b_1}^{0,s}\sum_{b_2}^{0,s}\ldots\sum_{b_F}^{0,s}\frac{b_1\cdot(b_1-1)}{(s-1)}\binom{s}{b_1}\binom{s}{b_2}\ldots\binom{s}{b_F}\cdot p^{b_1+b_2+\ldots b_F}\cdot q^{F\cdot s-b_1-b_2\ldots b_F}.$$

Die $(F-1)$ letzten Summen ergeben alle

$$\sum_{b_i}^{0,s}\binom{s}{b_i}p^{b_i}\cdot q^{s-b_i} = (p+q)^s.$$

Daher

$$p\cdot\frac{\partial E'}{\partial p} = F\cdot\sum_{b_1}^{0,s}\frac{b_1\cdot(b_1-1)}{s-1}\cdot\binom{s}{b_1}p^{b_1}\cdot q^{s-b_1}\cdot(p+q)^{s\cdot(F-1)} =$$

[nach (11)]

$$= \frac{s(s-1)}{s-1}\cdot p^2(p+q)^{s-2}(p+q)^{s(F-1)}.$$

$$\frac{\partial E'}{\partial p} = s\cdot F\cdot p\cdot(p+q)^{s\cdot F-2}\,; \qquad E'(p,q) = \int_0^p s\cdot F\cdot p\,(p+q)^{s\cdot F-2}\,dp.$$

Die untre Integrationsgrenze ist richtig gewählt, denn für $p = 0$ wird auch nach (26) $E(0, q)$ gleich null, weil in dem einzigen Falle, in dem der Exponent von $p$ in (26), nämlich $b_1 + b_2 + \ldots b_F$, gleich null wird, nach der oben getroffenen Festsetzung auch der zugehörige Koeffizient verschwindet. Trägt man nach der Integration der Beziehung $p = 1 - q$ Rechnung, so folgt

$$E'(1-q,q) = \int_0^{1-q} s\cdot F\cdot p\,(p+q)^{s\cdot F-2}\,dp.$$

Es ergibt sich also genau dasselbe Resultat wie in (24), und damit ist auch (25) aufs neue bewiesen. Ein Vergleich zwischen (26) und (6) ist geeignet, den Unterschied zwischen dem Berwaldschen Urnenschema und dem von uns zu Grunde gelegten nochmals zu verdeutlichen. Das Berwaldsche Schema unterscheidet sich — jedenfalls dort, wo er die Weinbergsche Geschwistermethode behandelt, — durch nichts von einem gewöhnlichen Bernoulli-Schema. Wenn dieses auch in tatsächlicher Hinsicht den in der Erblichkeitsstatistik vorliegenden Verhältnissen nicht gerecht wird, so ergibt sich doch auch,

— durch einen Vergleich von (25) und (19) — daß rein formal bei großem $n$ in erster Annäherung das Urnenschema mit konstantem $n$ durch ein solches mit konstantem $F$ ersetzt werden kann, wenn $F = \frac{n}{1-q^s}$ gewählt wird. Es sei noch kurz bemerkt, daß die hier benutzte Methode der Integraldarstellung sich mit Vorteil auch auf den von Berwald gebrauchten Ansatz anwenden läßt, der die einzelnen Serien nicht einfach numeriert, sondern ordnet je nach der Anzahl weißer Kugeln, die sie ergeben.

**5. Berechnung des mittleren Fehlers.** Zur Berechnung des zu (19) gehörigen mittleren Fehlers muß man offenbar bilden:

$$m^2 = E\left\{\frac{a_1(a_1-1)+a_2(a_2-1)+\ldots a_n(a_n-1)}{A(s-1)}\right\}^2 - \left\{E\left(\frac{a_1(a_1-1)+a_2(a_2-1)+\ldots a_n(a_n-1)}{A(s-1)}\right)\right\}^2 \quad (27).$$

Der Wert des zweiten Gliedes ist unmittelbar aus (19) zu entnehmen. Für das erste Glied ist — entsprechend (6) — anzusetzen:

$$E\left\{\frac{a_1(a_1-1)+a_2(a_2-1)+\ldots a_n(a_n-1)}{A(s-1)}\right\}^2 = \sum_{a_1}^{1,s}\sum_{a_2}^{1,s}\ldots\sum_{a_n}^{1,s}\left\{\frac{a_1(a_1-1)+a_2(a_2-1)+\ldots a_n(a_n-1)}{A(s-1)}\right\}^2$$

$$\cdot\binom{s}{a_1}\cdot\binom{s}{a_2}\ldots\binom{s}{a_n}\cdot\frac{p^A\cdot q^{n\cdot s-A}}{(1-q^s)^n} = G(p,q)\ .\ .\quad (28),$$

wobei einstweilen von der Beziehung $p+q=1$ abgesehen und $G$ also als Funktion zweier Veränderlicher aufgefaßt wird. Man setzt

$$G(p,q) = \frac{\Gamma(p,q)}{(1-q^s)^n\cdot(s-1)^2}\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ (29),$$

differenziert $\Gamma$ partiell nach $p$, multipliziert mit $p$, differenziert nochmals nach $p$ und multipliziert wieder mit $p$.

$$p\cdot\frac{\partial}{\partial p}\left(p\cdot\frac{\partial\Gamma}{\partial p}(p,q)\right) = p\cdot(p\cdot\Gamma')' = \sum_{a_1}^{1,s}\sum_{a_2}^{1,s}\ldots\sum_{a_n}^{1,s}\{a_1(a_1-1)+a_2\cdot(a_2-1)+\ldots a_n\cdot(a_n-1)\}^2$$

$$\cdot\binom{s}{a_1}\cdot\binom{s}{a_2}\ldots\binom{s}{a_n}\cdot p^A q^{ns-A}\quad .\ .\ .\ (30).$$

Wird die geschweifte Klammer auspotenziert, so ergeben sich $n^2$ Glieder. Unter ihnen sind die folgenden $n$ Glieder enthalten:

$$[a_1(a_1-1)]^2, [a_2(a_2-1)]^2, \ldots [a_n\cdot(a_n-1)]^2\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ (31).$$

Es bleiben also $n^2 - n = n(n-1)$ Glieder übrig von der Form:

$$a_i\cdot(a_i-1)\cdot a_k\cdot(a_k-1);\quad i=1,2\ldots n;\quad k=1,2\ldots n;\quad \text{aber } i \neq k\ .\ .\ .\ .\ (32).$$

Mit Rücksicht auf (31) ergeben sich aus (30) $n$ $n$-fache Summen, die aber alle einander gleich sind, also

$$\sum_{a_1}^{1,s}\sum_{a_2}^{1,s}\ldots\sum_{a_n}^{1,s}[a_1(a_1-1)]^2\cdot\binom{s}{a_1}\cdot\binom{s}{a_2}\ldots\binom{s}{a_n}\cdot p^{a_1+a_2+\ldots a_n}\cdot q^{n\cdot s-a_1-a_2\ldots a_n},$$

woraus nach (10) folgt:

$$\sum_{a_1}^{1,s}[a_1(a_1-1)]^2\binom{s}{a_1}\cdot p^{a_1}\cdot q^{s-a_1}\cdot\{(p+q)^s-q^s\}^{n-1}\quad .\ .\ .\ .\ (33).$$

Ebenso folgen mit Rücksicht auf (32) aus (30) $n(n-1)$ $n$-fache Summen, die alle einander gleich sind, also nach (10) und (11):

$$\sum_{a_1}^{1,s}\sum_{a_2}^{1,s}\ldots\sum_{a_n}^{1,s}a_1(a_1-1)\cdot a_2\cdot(a_2-1)\cdot\binom{s}{a_1}\cdot\binom{s}{a_2}\ldots\binom{s}{a_n}\cdot p^{a_1+a_2+\ldots a_n}\cdot q^{n\cdot s-a_1-a_2\ldots a_n}$$

$$=\sum_{a_1}^{1,s}\sum_{a_2}^{1,s}a_1\cdot(a_1-1)\cdot a_2\cdot(a_2-1)\cdot\binom{s}{a_1}\cdot\binom{s}{a_2}\cdot p^{a_1+a_2}\cdot q^{s-a_1+s-a_2}\cdot\{(p+q)^s-q^s\}^{n-2}$$

$$=\sum_{a_1}^{1,s}a_1\cdot(a_1-1)\cdot\binom{s}{a_1}\cdot p^{a_1}\cdot q^{s-a_1}\cdot\sum_{a_2}^{1,s}a_2\cdot(a_2-1)\cdot\binom{s}{a_2}\cdot p^{a_2}\cdot q^{s-a_2}\cdot\{(p+q)^s-q^s\}^{n-2}$$

$$=p^4\cdot s^2\cdot(s-1)^2\cdot(p+q)^{2s-4}\cdot\{(p+q)^s-q^s\}^{n-2}\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ (34).$$

Um die Summation in (33) auszuführen, setzt man

$$[a_1(a_1-1)]^2 = a_1(a_1-1)(a_1-2)\cdot(a_1-3)+4\cdot a_1\cdot(a_1-1)\cdot(a_1-2)+2\cdot a_1\cdot(a_1-1)$$

und, da bekanntlich

$$\sum_{a_1}^{1,s} a_1 \cdot (a_1 - 1) \cdot (a_1 - 2) \ldots (a_1 - k) \cdot \binom{s}{a_1} \cdot p^{a_1} \cdot q^{s-a_1} = p^{k+1} \cdot s\,(s-1) \cdot (s-2) \ldots (s-k) \cdot (p+q)^{s-k-1}$$

ist, wird (33) gleich

$$\{(p+q)^s - q^s\}^{n-1} \cdot [p^4 \cdot s \cdot (s-1)(s-2)(s-3) \cdot (p+q)^{s-4} + 4\,p^3 \cdot s\,(s-1)(s-2)(p+q)^{s-3} + 2\,p^2 \cdot s\,(s-1)(p+q)^{s-2}] \quad . \quad . \quad . \quad (35).$$

Mit Rücksicht auf (35, 34, 32, 31) folgt aus (30):

$$(p \cdot \Gamma')' = n \cdot \{(p+q)^s - q^s\}^{n-1} \cdot [p^3 \cdot s\,(s-1)(s-2)(s-3)(p+q)^{s-4} + 4\,p^2 \cdot s\,(s-1)(s-2)(p+q)^{s-3} + 2\,p \cdot s\,(s-1)(p+q)^{s-2}] + n\,(n-1) \cdot \{(p+q)^s - q^s\}^{n-2} \cdot p^3 \cdot s^2 \cdot (s-1)^2 \cdot (p+q)^{2s-4},$$

$$p \cdot \Gamma' = \int_0^p (p\,\Gamma')'\,d\,p \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (36).$$

Die untere Integrationsgrenze ist richtig gewählt, denn für $p = 0$ werden beide Seiten von (36) null. Der letzte Summand in (36) wird partiell integriert:

$$\int_0^p n \cdot (n-1)\,\{(p+q)^s - q^s\}^{n-2} \cdot s \cdot (p+q)^{s-1} \cdot p^3 \cdot s\,(s-1)^2 (p+q)^{s-3}\,d\,p$$

$$= n\,\{(p+q)^s - q^s\}^{n-1} \cdot p^3 \cdot s\,(s-1)^2 \cdot (p+q)^{s-3}$$

$$- \int_0^p n \cdot \{(p+q)^s - q^s\}^{n-1} \cdot s \cdot (s-1)^2 \cdot (3\,p^2\,(p+q)^{s-3} + (s-3) \cdot p^3 \cdot (p+q)^{s-4}\,d\,p \quad (37).$$

Setzt man (37) in (36) ein, so folgt:

$$p \cdot \Gamma' = s \cdot (s-1)^2 \cdot p^3 \cdot n \cdot \{(p+q)^s - q^s\}^{n-1} \cdot (p+q)^{s-3} + \int_0^p n \cdot \{(p+q)^s - q^s\}^{n-1}$$
$$[-p^3 \cdot (p+q)^{s-4} s\,(s-1)(s-3) + p^2 \cdot (p+q)^{s-3} s \cdot (s-1)(s-5) + 2\,p\,(p+q)^{s-2} \cdot s \cdot (s-1)]\;d\,p$$

Unter dem Integralzeichen wird $p$ durch $(p+q) - q$ ersetzt, alsdann ordnet man nach Potenzen von $q$.

$$p \cdot \Gamma' = s \cdot (s-1)^2 \cdot p^3 \cdot n \cdot \{(p+q)^s - q^s\}^{n-1} \cdot (p+q)^{s-3} + \int_0^p n \cdot \{(p+q)^s - q^s\}^{n-1} \cdot s \cdot (s-1) \cdot [(s-1) \cdot q \cdot (p+q)^{s-2} - 2\,(s-2) \cdot q^2 \cdot (p+q)^{s-3} + (s-3) \cdot q^3 \cdot (p+q)^{s-4}]\,d\,p$$

$$p \cdot \Gamma' = s \cdot (s-1)^2 \cdot p^3 \cdot n \cdot \{(p+q)^s - q^s\}^{n-1} \cdot (p+q)^{s-3} + (s-1)^2 \cdot q \cdot L_1 - 2\,(s-1)(s-2) \cdot L_2 \cdot q^2 + (s-1)(s-3) \cdot q^3\,L_3,$$

wobei $L_\nu$ ($\nu = 1, 2, 3$) gesetzt ist $= \int_0^p n \cdot \{(p+q)^s - q^s\}^{n-1} \cdot s \cdot (p+q)^{s-1-\nu}\,d\,p$.

$$\Gamma(p,q) = s\,(s-1)^2 \int_0^p p^2 \cdot n \cdot \{p+q)^s - q^s\}^{n-1} (p+q)^{s-3}\,d\,p + (s-1)^2 \cdot q \cdot \int_0^p \frac{L_1}{p}\,d\,p -$$
$$- 2\,(s-1)(s-2) \cdot q^2 \cdot \int_0^p \frac{L_2}{p}\,d\,p + (s-1)(s-3) \cdot q^3 \cdot \int_0^p \frac{L_3}{p}\,d\,p \quad . \quad . \quad . \quad (38).$$

In der Tat folgt aus (28), daß die Integrationsgrenze richtig gewählt ist, denn es muß $\Gamma(0,q) = 0$ sein. Im ersten Integranden von (38) wird $p$ durch $(p+q) - q$ ersetzt.

$$\Gamma(p,q) = (s-1)^2\,(L_0 - 2\,q\,L_1 + q^2\,L_2) + (s-1)^2 \cdot q \cdot \int_0^p \frac{L_1}{p}\,dp -$$
$$- 2 \cdot (s-1)(s-2) \cdot q^2 \int_0^p \frac{L_2}{p}\,dp + (s-1)(s-3) \cdot q^3 \cdot \int_0^p \frac{L_3}{p}\,dp.$$

Trägt man nach der Integration der Beziehung $p = 1 - q$ Rechnung, so folgt:

$$\Gamma(1-q, q) = (s-1)^2 (J_0 - 2q \cdot J_1 + q^2 \cdot J_2) + (s-1)^2 \cdot q \cdot \int_0^{1-q} \frac{L_1}{p} dp -$$

$$- 2 \cdot (s-1)(s-2) \cdot q^2 \cdot \int_0^{1-q} \frac{L_2}{p} dp + (s-1)(s-3) \cdot q^3 \cdot \int_0^{1-q} \frac{L_3}{p} dp \quad (39).$$

Hierbei hat $J_\varkappa$ ($\varkappa = 0, 1, 2$) die in (15) angegebene Bedeutung. Das Integral $J_\varkappa$ ist in (16 bis 18) behandelt. Es kommt also nur noch auf die Untersuchung des Integrals $\int_0^{1-q} \frac{L_\nu}{p} dp$ ($\nu = 1, 2, 3$) an.

$$K_\nu = \int_0^{1-q} \frac{L_\nu}{p} dp = \int_0^{1-q} \frac{dp}{p} \int_0^p n\{(p+q)^s - q^s\}^{n-1} \cdot s(p+q)^{s-1-\nu} dp$$

$$= \int_0^{1-q} \frac{du}{u} \int_0^u n \cdot \{(p+q)^s - q^s\}^{n-1} \cdot s \cdot (p+q)^{s-1-\nu} dp,$$

wenn man die Variable des äußeren Integrals statt $p$ $u$ nennt.

Durch Vertauschung der Integrationsfolge ergibt sich:

$$K_\nu = \int_0^{1-q} dp \cdot n\{(p+q)^s - q^s\}^{n-1} \cdot s \cdot (p+q)^{s-1-\nu} \int_p^{1-q} \frac{du}{u} =$$

$$K_\nu = \int_0^{1-q} n \cdot \{(p+q)^s - q^s\}^{n-1} \cdot s \cdot (p+q)^{s-1-\nu} [\log(1-q) - \log p] \, dp.$$

Es wird $(p+q)^s = y$, $s(p+q)^{s-1} dp = dy$ substituiert.

$$K_\nu = \int_{q^s}^1 n \cdot \{y - q^s\}^{n-1} y^{-\nu/s} [\log(1-q) - \log(y^{1/s} - q)] \, dy = \int_{q^s}^1 n \cdot \{y - q^s\}^{n-1} f_\nu(y) \, dy \quad (40),$$

wo also $f_\nu(y) = y^{-\nu/s} [\log(1-q) - \log(y^{1/s} - q)]$ gesetzt ist, so folgt durch wiederholte partielle Integration

$$K_\nu = (1-q^s)^n \cdot f_\nu(1) - \frac{(1-q^s)^{n+1}}{n+1} \cdot f_\nu{}'(1) + \int_{q^s}^1 \frac{(y-q^s)^{n+1}}{n+1} \cdot f_\nu{}''(y) \, dy \quad . \quad . \quad (41).$$

Hierbei ist berücksichtigt, daß die heraustretenden Glieder an der unteren Grenze verschwinden. Ueberdies ist:

$$\left.\begin{aligned} f_\nu(1) &= 1^{-\nu/s} \cdot [\log(1-q) - \log(1-q)] = 0 \\ f_\nu{}'(1) &= -\frac{\nu}{s} \cdot y^{-\nu/s-1} \cdot [\log(1-q) - \log(y^{1/s} - q)] \Big|^{y=1} - y^{-\nu/s} \cdot \frac{1}{s} \cdot \frac{y^{1/s-1}}{y^{1/s} - q} \Big|^{y=1} = -\frac{1}{s(1-q)} \end{aligned}\right\} (42).$$

Das Integral auf der rechten Seite von (41) schreibt man:

$$\int_{q^s}^1 \frac{(y-q^s)^{n+1}}{n+1} \cdot f_\nu{}''(y) \, dy = \int_{q^s}^1 \frac{(y-q^s)^{n-1}}{(n+1)} \cdot (y-q^s)^2 \cdot f_\nu{}''(y) \, dy.$$

Da $(y - q^s)^{n-1}$ im ganzen Intervall nicht negativ ist, $(y - q^s)^2 \cdot f_\nu{}''(y)$ aber dort stets einen endlichen Wert hat, folgt durch Anwendung des ersten Mittelwertsatzes der Integralrechnung:

$$\int_{q^s}^1 \frac{(y-q^s)^{n+1}}{n+1} \cdot f_\nu{}''(y) \, dy = \frac{(1-q^s)^n}{n(n+1)} \cdot (\vartheta_\nu - q^s)^2 \cdot f_\nu{}''(\vartheta_\nu) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (43),$$

wo $q^s \leqq \vartheta_\nu \leqq 1$ ist. Mit Rücksicht auf (41) bis (43) geht (40) jetzt über in

$$K_\nu = \int_0^{1-q} \frac{L_\nu}{p} dp = \frac{(1-q^s)^{n+1}}{s(n+1)} \cdot \frac{1}{1-q} + \frac{(1-q^s)^n}{n(n+1)} (\vartheta_\nu - q^s)^2 \cdot f_\nu{}''(\vartheta_\nu) \quad . \quad . \quad (44).$$

Nun wird (44) und (18) in (39) eingesetzt.

$$\frac{\Gamma(1-q,q)}{(1-q^s)^n} = (s-1)^2 \cdot \left\{1 - 2q + q^2 + \frac{1-q^s}{s(n+1)}(-2q + 2q^2)\right\}$$
$$+ \frac{q \cdot (s-1)(1-q^s)}{s \cdot (n+1) \cdot p} \cdot [s - 1 - 2q \cdot (s-2) + q^2 \cdot (s-3)] + 0\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

wobei $0(1/n^2)$ den Rest andeuten soll, der wie $1/n^2$ klein wird. Berücksichtigt man die Beziehung $p = 1 - q$, so folgt:

$$\frac{\Gamma(1-q,q)}{(1-q^s)^n \cdot (s-1)^2} = p^2 + \frac{1-q^s}{s \cdot (n+1)}\left(-2pq + pq + \frac{2q^2}{s-1}\right) + 0\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Dann wird nach (29)

$$G(1-q,q) = p^2 + \frac{1-q^s}{s \cdot (n+1)} \cdot \left(-pq + \frac{2q^2}{s-1}\right) + 0\left(\frac{1}{n^2}\right) \quad . \quad . \quad . \quad (45a).$$

Nach (19), (27), (28) ergibt sich für das Quadrat des gesuchten mittleren Fehlers:

$$m^2 = \frac{1-q^s}{s \cdot (n+1)} \cdot \left(pq + \frac{2q^2}{s-1}\right) + 0\left(\frac{1}{n^2}\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (45).$$

Bei Benutzung des Berwaldschen Urnenschemas würde sich für den mittleren Fehler, dessen Berechnung alsdann erheblich leichter wäre, ergeben:

$$m^2 = \frac{1}{F \cdot s} \cdot \left(pq + \frac{2q^2}{s-1}\right) + 0\left(\frac{1}{F^2}\right)$$

in Uebereinstimmung mit dem Resultat, das Berwald, l. c. S. 106, erhalten hat.

**6. Fall verschiedener Kinderzahlen.** Wir gehen jetzt zu der allgemeinen Geschwistermethode Weinbergs über, die den in der Praxis fast ausschließlich auftretenden Fall behandelt, in dem die $n$ statistisch untersuchten Familien verschiedene Kinderzahlen aufweisen. Man denke sich aus einer Urne, die mit weißen und schwarzen Kugeln im Verhältnis $p:q$ gemischt ist, wobei wieder $p + q = 1$ ist, Serien gezogen, aber nun nicht mehr von konstanter Länge. Die Serien, in denen sich nur schwarze Kugeln ergeben, werden eleminiert, und es mögen auf diese Weise $n$-Serien übrig bleiben, von denen jede also mindestens eine weiße Kugel enthält. $s_i$ $(i = 1, 2, 3 \ldots n)$ bezeichne die Länge der $i$-ten Serie, und es soll $s_i$ der Werte

$$2, 3, 4, \ldots k \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (46)$$

fähig sein. Der Fall $s_i = 1$ ist deshalb ausgeschlossen worden, weil Serien, die mindestens eine weiße Kugel enthalten und nur die Länge 1 haben, für die Bestimmung der unbekannten Wahrscheinlichkeit $p$ völlig wertlos sind. $a_i$ $(i = 1, 2, \ldots n)$ bezeichne die Anzahl der weißen Kugeln, die sich in der $i$-ten Serie finden, und es ist dann also $a_i$ der Werte $1, 2, \ldots s_i$ fähig. Zur Bestimmung der unbekannten Wahrscheinlichkeit $p$ liefert die allgemeine Geschwistermethode folgende Regel. Man bilde den Quotienten:

$$\frac{a_1(a_1-1) + a_2(a_2-1) + \ldots a_n(a_n-1)}{a_1(s_1-1) + a_2(s_2-1) + \ldots a_n(s_n-1)} = p \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (47).$$

Zur Kontrolle dieser Gleichung bildet man den Erwartungswert

$$E\left\{\frac{a_1(a_1-1) + a_2(a_2-1) + \ldots a_n(a_n-1)}{a_1(s_1-1) + a_2(s_2-1) + \ldots a_n(s_n-1)}\right\}$$
$$= \sum_{a_1}^{1,s_1} \sum_{a_2}^{1,s_2} \ldots \sum_{a_n}^{1,s_n} \frac{a_1(a_1-1) + a_2 \cdot (a_2-1) + \ldots a_n(a_n-1)}{a_1(s_1-1) + a_2(s_2-1) + \ldots a_n(s_n-1)} \cdot u(a_1) \cdot u(a_2) \ldots u(a_n) = E(1) \quad (48).$$

Für $u(a_i)$ ergibt sich entsprechend wie in (5) der Wert

$$u(a_i) = \binom{s_i}{a_i} \cdot \frac{p^{a_i} \cdot q^{s_i - a_i}}{1 - q^{s_i}} = \binom{s_i}{a_i} \frac{p^{a_i} \cdot q^{s_i - a_i}}{\pi_i} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (49),$$

wo also $\pi_i = 1 - q^{s_i}$ gesetzt ist. Jetzt bildet man die Funktion

$$E(t) = \sum_{a_1}^{1,s_1} \sum_{a_2}^{1,s_2} \ldots \sum_{a_n}^{1,s_n} \frac{a_1(a_1-1) + a_2 \cdot (a_2-1) + \ldots a_n(a_n-1)}{a_1(s_1-1) + a_2(s_2-1) + \ldots a_n(s_n-1)} \cdot \binom{s_1}{a_1} \cdot \binom{s_2}{a_2} \cdots \binom{s_n}{a_n}$$
$$\cdot \frac{p^{a_1 + a_2 + \ldots a_n} \cdot q^{s_1 - a_1 + s_2 - a_2 + \ldots s_n - a_n} \cdot t^{a_1(s_1-1) + a_2(s_2-1) + \ldots a_n(s_n-1)}}{\pi_1 \cdot \pi_2 \cdot \ldots \cdot \pi_n} \quad (50)$$

und man erkennt, daß für $t = 1$ (50) in (48) übergeht. Zu beachten ist, daß der Exponent von $t$ in (50): $a_1(s_1-1) + a_2(s_2-1) + \ldots a_n \cdot (s_n-1)$ . . . . . (51)

stets eine positive ganze Zahl ist, weil $a_i$ niemals gleich 0 und $s_i$ niemals gleich 1 sein kann (s. 46 ff.). Jetzt wird (50) nach $t$ differenziert und hernach mit $t$ multipliziert.

$$t \cdot E'(t) = \sum_{a_1}^{1,s_1} \sum_{a_2}^{1,s_2} \cdots \sum_{a_n}^{1,s_n} \{a_1(a_1-1) + a_2(a_2-1) + \ldots a_n(a_n-1)\} \cdot \binom{s_1}{a_1} \cdot \binom{s_2}{a_2} \cdots \binom{s_n}{a_n} \cdot \frac{p^{a_1+a_2+\ldots a_n} \cdot q^{s_1-a_1+s_2-a_2+\ldots s_n-a_n} \cdot t^{a_1(s_1-1)+a_2(s_2-1)+\ldots a_n(s_n-1)}}{\pi_1 \cdot \pi_2 \cdot \ldots \cdot \pi_n} \quad (52).$$

Zerlegt man die geschweifte Klammer in ihre $n$ Summanden, so erhält man $n$ $n$-fache Summen, von denen die erste lautet:

$$G_1(t) = \sum_{a_1}^{1,s_1} \sum_{a_2}^{1,s_2} \cdots \sum_{a_n}^{1,s_n} a_1(a_1-1) \cdot \binom{s_1}{a_1} \cdot \binom{s_2}{a_2} \cdots \binom{s_n}{a_n} \cdot \frac{p^{a_1+a_2+\ldots a_n} \cdot q^{s_1-a_1+s_2-a_2+\ldots s_n-a_n} \cdot t^{a_1 \cdot (s_1-1)+a_2 \cdot (s_2-1)+\ldots a_n \cdot (s_n-1)}}{\pi_1 \cdot \pi_2 \ldots \pi_n} \quad \ldots (53).$$

Nun ist entsprechend wie in (10)

$$\sum_{a_i}^{1,s_i} \binom{s_i}{a_i} (p \cdot t^{s_i-1})^{a_i} q^{s_i-a_i} = (q + p \cdot t^{s_i-1})^{s_i} - q^{s_i} \quad \ldots\ldots (54)$$

und wenn man diese Gleichung zweimal nach $(p \cdot t^{s_i-1})$ differenziert, und hernach mit $(p \cdot t^{s_i-1})^2$ multipliziert, so folgt:

$$\sum_{a_i}^{1,s_i} a_i(a_i-1) \binom{s_i}{a_i} (p \cdot t^{s_i-1})^{a_i} \cdot q^{s_i-a_i} = p^2 \cdot t^{2 \cdot s_i-2} \cdot s_i(s_i-1) (q + p \cdot t^{s_i-1})^{s_i-2} \quad (55).$$

Nun ist in (53) die Summation ausführbar. Man beginnt mit $a_n$, $a_{n-1}$, ... und hört mit $a_2$ auf. Nach (54) folgt:

$$G_1(t) = \frac{(q + p \cdot t^{s_2-1})^{s_2} - q^{s_2}}{\pi_2} \cdot \frac{(q + p \cdot t^{s_3-1})^{s_3} - q^{s_3}}{\pi_3} \cdots \frac{(q + p \cdot t^{s_n-1})^{s_n} - q^{s_n}}{\pi_n}$$
$$\cdot \sum_{a_1}^{1,s_1} a_1(a_1-1) \binom{s_1}{a_1} p^{a_1} \cdot q^{s_1-a_1} \cdot t^{(s_1-1) \cdot a_1} = [\text{nach } (55)]$$

$$G_1(t) = p^2 \cdot t^{2 s_1-2} \cdot s_1(s_1-1) \cdot \frac{(q + p \cdot t^{s_1-1})^{s_1-2}}{\pi_1} \cdot \frac{(q + p \cdot t^{s_2-1})^{s_2} - q^{s_2}}{\pi_2} \cdot \frac{(q + p \cdot t^{s_3-1})^{s_3} - q^{s_3}}{\pi_3}$$
$$\cdots \frac{(q + p \cdot t^{s_n-1})^{s_n} - q^{s_n}}{\pi_n} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (56).$$

Dann ist nach (52) und (53)

$$t \cdot E'(t) = G_1(t) + G_2(t) + G_3(t) + \ldots G_n(t) \quad \ldots\ldots (57),$$

wobei die $G_1$, $G_2$, $G_3$ usw. durch zyklische Vertauschung der Indizes $s_\nu$ in (56) erhalten werden.

$$E(t) = \int_0^t \frac{G_1(t)}{t} dt + \int_0^t \frac{G_2(t)}{t} dt + \ldots \int_0^t \frac{G_n(t)}{t} dt.$$

Daß die untere Integrationsgrenze richtig gewählt ist, folgt aus (51). Dann wird der gesuchte Wert

$$E(1) = \int_0^1 \frac{G_1(t)}{t} dt + \int_0^1 \frac{G_2(t)}{t} dt + \ldots \int_0^1 \frac{G_n(t)}{t} dt \quad \ldots\ldots (58).$$

Dieses $E(1)$ ist der Erwartungswert von (47), wenn die $s_1$, $s_2$, ... $s_n$ zwar voneinander verschieden, aber — jedes für sich — doch zeitlich konstant, d. h. bei wiederholten statistischen Aufnahmen dieselben bleiben. Dies ist nun in Wirklichkeit natürlich nicht der Fall. Konstant ist lediglich das Verhältnis der relativen Häufigkeiten, mit denen sich Familien verschiedener Kinderzahlen in der abgeschlossenen Population finden, in der wir unsere statistischen Untersuchungen anstellen. Wir gelangen so zu dem folgenden Urnenschema. Man denke sich eine große Menge von Zetteln mit irgend einer der Ziffern aus der Reihe 2, 3, 4, ... $k$ s. (46) beschrieben. Diese Zettel werden in einen Kasten geworfen, und es möge unter ihnen die Ziffer 2 mit der relativen Häufigkeit $\varphi(2)$, die

Ziffer 3 mit der relativen Häufigkeit $\varphi(3)$, die Ziffer $k$ schließlich mit der relativen Häufigkeit $\varphi(k)$ vorkommen, so daß also

$$\varphi(2) + \varphi(3) + \varphi(4) + \ldots \varphi(k) = 1 \quad \ldots \ldots \quad (59)$$

wird. Aus diesem Kasten werden $n$ Zettel entnommen, und es möge die Gesamtzahl der Zettel in dem Kasten so groß sein gegenüber $n$, daß durch Entnahme von $n$ Zetteln die relative Häufigkeit der einzelnen Zettel nicht verändert wird, also auch während der Ziehung als konstant vorausgesetzt werden kann. Die Zettel werden in der Reihenfolge, in der sie gezogen werden, bezeichnet mit $s_1, s_2, s_3, \ldots s_n$. Und nun gehe man zu der Urne, die mit weißen und schwarzen Kugeln im Verhältnis $p:q$ gemischt ist, und entnehme zuerst eine Serie von $s_1$ Kugeln; erscheinen nur schwarze Kugeln, so wird diese Serie als nicht geschehen betrachtet und so lange eine Serie von $s_1$ Kugeln gezogen, bis sich eine brauchbare Serie von $s_1$ Kugeln ergibt. Entsprechend verfährt man mit $s_2$, $s_3, \ldots s_n$. Die Wahrscheinlichkeit, daß sich an erster Stelle bei Entnahme der $n$ Zettel aus dem Kasten ein Zettel mit der Ziffer $s_1$ ergibt, ist $\varphi(s_1)$, die Wahrscheinlichkeit, daß sich an zweiter Stelle die Ziffer $s_2$ ergibt, ist $\varphi(s_2)$ und daß an $n$ ter Stelle $s_n$ erscheint, dafür ist die Wahrscheinlichkeit $\varphi(s_n)$. Also ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß die $n$ Ereignisse in der angegebenen Reihenfolge eintreten:

$$\varphi(s_1) \cdot \varphi(s_2) \cdot \varphi(s_3) \ldots \cdot \varphi(s_n) \quad \ldots \ldots \quad (60).$$

$E(1)$ in (58) ist der Erwartungswert von (47) unter der Voraussetzung, daß bei der Entnahme der $n$ Serien aus der Urne die erste Serie eine bestimmte Länge $s_1$, die zweite Serie ein bestimmte Länge $s_2$, die $n$-te Serie eine bestimmte Länge $s_n$ habe. Die Wahrscheinlichkeit a priori dafür, daß diese Voraussetzung erfüllt ist, ist durch (60) gegeben. Also ist

$$E = \sum_{s_1}^{2,k} \sum_{s_2}^{2,k} \sum_{s_3}^{2,k} \ldots \sum_{s_n}^{2,k} E(1) \cdot \varphi(s_1) \cdot \varphi(s_2) \cdot \varphi(s_3) \ldots \varphi(s_n).$$

Setzt man für $E(1)$ den Wert aus (58) ein, so erhält man $n$ $n$fache Summen, die aber, wie aus (56) und (57) hervorgeht, sich lediglich durch die Bezeichnung des Summationsindex unterscheiden, also alle einander gleich sind. Daher

$$E = n \cdot \sum_{s_1}^{2,k} \sum_{s_2}^{2,k} \sum_{s_3}^{2,k} \ldots \sum_{s_n}^{2,k} \int_0^1 \frac{G_1(t)}{t} \, dt \cdot \varphi(s_1) \cdot \varphi(s_2) \cdot \varphi(s_3) \ldots \cdot \varphi(s_n) \quad . \quad . \quad (61).$$

Setzt man für $G_1(t)$ den Wert aus (56) ein [über die Bedeutung von $\pi$ siehe (49)], so erkennt man, daß die Summation ausführbar ist, weil der Summationsindex in verschiedenen Faktoren auftritt. Es erscheint z. B. $(n-1)$-mal der Faktor

$$\sum_{s_\nu}^{2,k} \frac{(q + p \cdot t^{s_\nu - 1})^{s_\nu} - q^{s_\nu}}{1 - q^{s_\nu}} \cdot \varphi(s_\nu), \quad \text{der durch} \quad D\left\{\frac{(q + p \cdot t^{s-1})^{s} - q^{s}}{1 - q^{s}}\right\} \quad . \quad . \quad (62).$$

bezeichnet werde.

Offenbar sind diese $(n-1)$ Faktoren alle einander gleich, da sie sich lediglich durch den Summationsindex unterscheiden. Und schließlich kommt bei der Substitution von $G_1(t)$ aus (56) in (61) noch der Faktor

$$\sum_{a_1}^{2,k} \left\{p^2 \cdot t^{2 s_1 - 3} \cdot s_1 (s_1 - 1) \cdot \frac{(q + p \cdot t^{s_1 - 1})^{s_1 - 2}}{1 - q^{s_1}}\right\} \cdot \varphi(s_1)$$

vor, der durch

$$D\left\{p^2 \cdot t^{2s-3} \cdot s(s-1) \cdot \frac{(q + p \cdot t^{s-1})^{s-2}}{1 - q^{s}}\right\}$$

bezeichnet werde. Jetzt geht (61) über in:

$$E = \int_0^1 n \cdot D^{n-1}\left\{\frac{(q + p \cdot t^{s-1})^{s} - q^{s}}{1 - q^{s}}\right\} \cdot D\left\{p^2 \cdot t^{2s-3} \cdot s(s-1) \cdot \frac{(q + p \cdot t^{s-1})^{s-2}}{1 - q^{s}}\right\} dt \quad (63).$$

$D\left\{\frac{(q + p \cdot t^{s-1})^{s} - q^{s}}{1 - q^{s}}\right\}$, das von nun an einfach mit $D(t)$ bezeichnet werde, wird, wenn man die Summation in (62) ausführt:

$$D(t) = \frac{(q + p \cdot t)^2 - q^2}{1 - q^4} \cdot \varphi(2) + \frac{(q + p \cdot t^2)^3 - q^3}{1 - q^3} \cdot \varphi(3) + \ldots \frac{(q + p \cdot t^{k-1})^k - q^k}{1 - q^k} \cdot \varphi(k) \quad (64).$$

Es wird also

$$D(0) = 0 \quad \text{und} \quad D(1) = 1 \quad \dots\dots\dots \quad (65),$$

weil $p + q = 1$ und $\varphi(2) + \varphi(3) + \dots \varphi(k)$ nach (59) gleich 1 ist

$$D'(t) = \frac{2\cdot(q + p\cdot t)^1\cdot p}{1-q^2}\cdot\varphi(2) + \frac{3\cdot(q+p\cdot t^2)^2\cdot p\cdot 2\,t}{1-q^3}\cdot\varphi(3) + \dots$$

$$+ \frac{k\cdot(q+p\cdot t^{k-1})^{k-1}\cdot p\cdot(k-1)\,t^{k-2}}{1-q^k}\cdot\varphi(k) = D\left\{\frac{s\,(s-1)\,p\cdot t^{s-2}\cdot(q+p\cdot t^{s-1})^{s-1}}{1-q^s}\right\} \quad . \quad (66).$$

Es wird also

$$D'(0) = \frac{2\,p\,q\cdot\varphi(2)}{1-q^2} \quad \dots\dots\dots \quad (67)$$

und

$$D'(1) = D\left\{\frac{s\,(s-1)\cdot p}{1-q^s}\right\} \quad \dots\dots\dots \quad (68).$$

Der Ausdruck in (63):

$$D\left\{\frac{p^2\cdot t^{2s-3}\cdot s\,(s-1)\cdot(q+p\cdot t^{s-1})^{s-2}}{1-q^s}\right\} = D_1(t) \quad \dots\dots \quad (69)$$

wird wie folgt umgeformt:

$$D_1(t) = D\left\{(p\cdot t^{s-1} + q - q)\cdot p\cdot t^{s-2}\cdot s\,(s-1)\,\frac{(q+p\cdot t^{s-1})^{s-2}}{1-q^s}\right\}$$

$$= D\left\{p\cdot t^{s-2}\cdot s\,(s-1)\,\frac{(q+p\cdot t^{s-1})^{s-1}}{1-q^s}\right\} - q\cdot D\left\{p\cdot t^{s-2}\cdot s\,(s-1)\,\frac{(q+p\cdot t^{s-1})^{s-2}}{1-q^s}\right\}$$

[nach (66)]

$$D_1(t) = D'(t) - q\cdot D_2(t) \quad \dots\dots\dots \quad (70),$$

wobei also gesetzt ist:

$$D_2(t) = D\left\{p\cdot t^{s-2}\cdot s\,(s-1)\,\frac{(q+p\cdot t^{s-1})^{s-2}}{1-q^s}\right\} = \frac{p\cdot 2\cdot 1}{1-q^2}\cdot\varphi(2)$$

$$+ p\cdot t^1\cdot 3\cdot 2\cdot\frac{(q+p\cdot t^2)^1}{1-q^3}\cdot\varphi(3) + \dots p\cdot t^{k-2}\cdot k\cdot(k-1)\,\frac{(q+p\cdot t^{k-1})^{k-2}}{1-q^k}\cdot\varphi(k) \quad (71),$$

$$D_2(0) = \frac{2\,p}{1-q^2}\cdot\varphi(2), \qquad D_2(1) = D\left\{\frac{p\cdot s\,(s-1)}{1-q^s}\right\} \quad \dots\dots \quad (72);$$

weil $p + q = 1$ ist. Mit Rücksicht auf (69), (70) geht (63) über in:

$$E = \int_0^1 n\cdot D^{(n-1)}(t)\cdot[D'(t) - q\cdot D_2(t)]\,d\,t,$$

$$E = D^n(t)\Big|_0^1 - q\cdot\int_0^1 n\cdot D^{n-1}(t)\cdot D_2(t)\,d\,t \quad \text{[nach (65)]},$$

$$E = 1 - q\cdot J_2 \quad \dots\dots\dots \quad (73),$$

wobei gesetzt ist

$$J_2 = \int_0^1 n\cdot D^{n-1}(t)\,D_2(t)\,d\,t = \int_0^1 n\cdot D^{n-1}(t)\cdot D'(t)\cdot\frac{D_2(t)}{D'(t)}\,d\,t.$$

Durch partielle Integration folgt:

$$J_2 = D^n(t)\cdot\frac{D_2(t)}{D'(t)}\Big|_0^1 - \int_0^1 D^n(t)\cdot\frac{D'(t)\cdot D_2'(t) - D''(t)\cdot D_2(t)}{[D'(t)]^2}\,d\,t.$$

Durch nochmalige partielle Integration des letzten Integrals, nachdem zuvor Nenner und Zähler des Integranden mit $D'(t)$ multipliziert worden sind, ergibt sich:

$$J_2 = D^n(t)\cdot\frac{D_2(t)}{D'(t)}\Big|_0^1 - \frac{D^{n+1}(t)}{n+1}\cdot\frac{D'(t)\cdot D_2'(t) - D''(t)\cdot D_2(t)}{[D'(t)]^3}\Big|_0^1$$

$$+ \int_0^1 \frac{D^{n+1}(t)}{n+1}\cdot\frac{d}{d\,t}\left(\frac{D'(t)\cdot D_2'(t) - D''(t)\cdot D_2(t)}{[D'(t)]^3}\right)d\,t \quad \dots\dots \quad (74).$$

Da $D'(0)$ nach (67) von 0 verschieden ist, $D(0)$ dagegen $= 0$ ist, verschwinden die herausgetretenen Glieder an der unteren Grenze. Aus (66) folgt

$$D''(1) = D\left\{\frac{s(s-1)(s-2)\cdot p + p^2\cdot s(s-1)^3}{1-q^s}\right\} \quad \ldots \ldots \quad (75),$$

und aus (71)

$$D_2'(1) = D\left\{\frac{s(s-1)(s-2)\cdot p + p^2\cdot s(s-1)^2(s-2)}{1-q^s}\right\} \quad \ldots \quad (76).$$

Setzt man die Werte aus (65), (68), (72), (75), (76) in (74) ein, so folgt

$$J_2 = 1 + \frac{1}{n+1}\cdot\frac{D\left\{\frac{s(s-1)^2}{1-q^s}\right\}}{\left(D\left\{\frac{s(s-1)}{1-q^s}\right\}\right)^2} + 0\left(\frac{1}{n^2}\right) \quad \ldots \ldots \quad (77).$$

Daß das letzte Integral in (74) von der Ordnung $1/n^2$ klein wird, folgt durch Anwendung des ersten Mittelwertsatzes der Integralrechnung. Denn da $D'(t)$ nach (67) bei $t = 0$ und auch sonst im Intervall von $0 - 1$ von null verschieden ist, liegt

$$\frac{1}{D'(t)}\cdot\frac{d}{dt}\left(\frac{D'(t)\cdot D_2'(t) - D''(t)\cdot D_2(t)}{[D'(t)]^3}\right) \quad \ldots \ldots \quad (78)$$

im Intervall von 0 bis 1 zwischen endlichen Grenzen, und $D(t)$ wird, wie aus (64) hervorgeht, im ganzen Intervall nicht negativ. Bezeichnet also $M$ einen Mittelwert, den die Funktion (78) an einer gewissen Stelle im Intervall $0 \leqq t \leqq 1$ annimmt, so kann das letzte Integral in (74) gesetzt werden $= \frac{M}{(n+1)(n+2)}\cdot D^{n+2}(t)\Big|_0^1 = \frac{M}{(n+1)(n+2)}$ [nach (65)]. Damit ist (77) vollständig bewiesen, und durch Einsetzung dieser Gleichung in (73) erhält man den gesuchten Erwartungswert

$$E = p - \frac{q}{n+1}\cdot\frac{D\left\{\frac{s(s-1)^2}{1-q^s}\right\}}{\left(D\left\{\frac{s(s-1)}{1-q^s}\right\}\right)^2} + 0\left(\frac{1}{n^2}\right) \quad \ldots \ldots \quad (79).$$

Nun ist es wohl klar, daß sich mit den eben entwickelten Methoden auch der mittlere Fehler der allgemeinen Geschwistermethode berechnen läßt. Es genügt wohl, hier lediglich das Resultat anzugeben. Das Quadrat des mittleren Fehlers wird

$$m^2 = \frac{1}{n+1}\cdot\frac{p\cdot q\cdot D\left\{\frac{s(s-1)^2}{1-q^s}\right\} + 2\,q^2\,D\left\{\frac{s(s-1)}{1-q^s}\right\}}{\left(D\left\{\frac{s(s-1)}{1-q^s}\right\}\right)^2} + 0\left(\frac{1}{n^2}\right) \quad \ldots \quad (80).$$

Um den Fall der allgemeinen Geschwistermethode auf den der einfachen zurückzuführen, braucht man in (79) bzw. (80 nur den Buchstaben $D$ durchzustreichen und kommt dann sofort auf die Formeln (19) bzw. (45).

## 7. Zahlentafeln.

Zahlentafel I (noch durch $n(n+1)$ zu dividieren).

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $s=2$ | $-0{,}090$ bis $0{,}115$ | $-0{,}100$ bis $0{,}246$ | $s=4$ | $-0{,}017$ bis $0{,}016$ | $-0{,}030$ bis $0{,}010$ |
| $s=3$ | $-0{,}045$ » $0{,}042$ | $-0{,}050$ » $0{,}060$ | $s=5$ | $-0{,}022$ » $0{,}004$ | $-0{,}030$ » $0{,}000$ |
| | $p={}^1/_4$; $q={}^3/_4$ | $p=q={}^1/_2$ | | $p={}^1/_4$; $q={}^3/_4$ | $p=q={}^1/_2$ |

Zahlentafel II (noch durch $n(n+1)$ zu dividieren).

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $s=2$ | $-0{,}075$ bis $0{,}145$ | $0{,}032$ bis $0{,}426$ | $s=4$ | $+0{,}010$ bis $0{,}056$ | $0{,}060$ bis $0{,}147$ |
| $s=3$ | $-0{,}022$ » $0{,}079$ | $0{,}064$ » $0{,}211$ | $s=5$ | $+0{,}007$ » $0{,}044$ | $0{,}045$ » $0{,}121$ |
| | $p={}^1/_4$; $q={}^3/_4$ | $p=q={}^1/_2$ | | $p={}^1/_4$; $q={}^3/_4$ | $p=q={}^1/_2$ |

Zahlentafel III (noch durch $n$ zu dividieren).

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $s=2$ | $-26{,}0$ bis $50{,}3$ | $11{,}4$ bis $151$ | $s=4$ | $+10{,}4$ bis $58{,}3$ | $61{,}5$ bis $151$ |
| $s=3$ | $-15{,}2$ » $54{,}5$ | $43{,}8$ » $145$ | $s=5$ | $+9{,}8$ » $62{,}0$ | $61{,}9$ » $167$ |
| | $p={}^1/_4$; $q={}^3/_4$ | $p=q={}^1/_2$ | | $p={}^1/_4$; $q={}^3/_4$ | $p=q={}^1/_2$ |

Zahlentafel IV (noch durch $n$ zu dividieren).

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $s=2$ | $-31,2$ bis $40,0$ | $-35,6$ bis $87,6$ | $s=4$ | $-17,6$ bis $16,6$ | $-30,8$ bis $10,3$ |
| $s=3$ | $-31,0$ » $29,2$ | $-34,3$ » $41,1$ | $s=5$ | $-30,7$ » $5,8$ | $-41,2$ » $0,0$ |
| | $p=1/4$; $q=3/4$ | $p=q=1/2$ | | $p=1/4$; $q=3/4$ | $p=q=1/2$ |

Zahlentafel I gilt für jedes $n$. Die andern sind unter der Voraussetzung $n \geqq 10$ berechnet. Zahlentafel I gibt die Grenzen des bei der Anwendung von (45a) begangenen absoluten Fehlers. Zahlentafel II gibt die Grenzen des bei der Anwendung von (45) begangenen absoluten Fehlers an. Zahlentafel III gibt dieselben Grenzen wie II, aber jetzt ausgedrückt in vH des Näherungswertes. Der Fehler von (45) setzt sich zusammen aus dem Fehler von (45a) und (19). Der Fehler von (19) läßt sich leicht ausschalten, indem man die in (17) unterbrochene Reihenentwicklung durch partielle Integration fortsetzt. Zahlentafel IV gibt die Grenzen des Fehlers an, der nach Ausschaltung des Fehlers von (19) in (45) verbleibt, und zwar ausgedrückt in vH des Näherungswertes (45). Die Formeln sind höchst wahrscheinlich erheblich genauer, als es nach der Zahlentafel scheint; doch dürfte es nicht so leicht sein, dies zu beweisen. Die numerische Auswertung geschah durch Berechnung der Integrale $J_k$ (16), (17) und $K_\nu$ [s. (40f)]. $J_k$ läßt sich leicht in eine Reihe entwickeln; die Abschätzung von $K_\nu$ geschah in der in (44) angedeuteten Art, indem für die Funktion $f_\nu''(y)$ durch Tabulierung Grenzen gewonnen wurden. Natürlich wurde nicht jedes $f_\nu''(y)$ für sich besonders abgeschätzt, sondern es wurde für (39) ein Restintegral berechnet, das in der eben angegebenen Weise abgeschätzt wurde. 725

# KURZE AUSZÜGE

## Russische Arbeiten zur Hydro- und Aerodynamik.

Das **Problem der Windausnutzung** wird von N. W. Krassowsky und G. H. Szabinin in einer Reihe von Aufsätzen behandelt (Berichte des Zentralen Aero-Hydrodynamischen Institutes in Moskau (Z. A. H. I.), Heft 2 und 22. Moskau 1923 und 1926). Die Windwirtschaft hat für die Zukunft Rußlands die allergrößte Bedeutung; ist doch nach Erschöpfung der Kohle- und Erdölvorräte die Windkraft (außer Wasserkraft) die einzige Kraftquelle der künftigen Kultur. Das statistische Material aus den Jahren 1917 und 1921 zeigt den Verfall der russischen Windwirtschaft. Die Anzahl der Windmotoren (lies Windmühlen) belief sich im Jahre 1921 in 38 Gouvernements des europäischen Rußlands auf 167720, von denen nur 67 (0,07 vH) wirkliche Windmotore waren (meistens mehrflügelige amerikanische Langsamläufer, Muster »Aermotor«). Mehr als 99 vH der Windmotore mahlen Mehl; bei rationeller Windwirtschaft ließe sich der gesamte Ernteertrag Rußlands durch Windkraft vermahlen. Die tatsächliche Wirtschaftlichkeit guter Windmotore ersieht man aus einer von O. Stertz angegebenen Zahlentafel. Es beträgt der Preis einer PS/St in Pfennigen bei einer

| Gesamtleistung von | 3 PS | 10 PS |
|---|---|---|
| Dampfmaschine . . . | 25,5 | 16,3 |
| Benzin . . . . . . | 22,0 | 16,2 |
| Elektromotor . . . . | 18,5 | 15,3 |
| Windmotor . . . . . | 10,7 | 7,8 |

Die Zahlen beziehen sich auf (hauptsächlich) landwirtschaftliche Kleinbetriebe. Die Leistung eines Windmotors ergibt sich gleich

$$N = 0{,}000494 \, \frac{\eta}{0{,}592} \cdot F \cdot v^3 \quad . \; . \; . \; . \; (1),$$

worin $N$ die Leistung in PS, $\eta$ den Wirkungsgrad $(\eta)_{\max\,\mathrm{theor}} = 0{,}592$, $F$ die Windradkreisfläche $(\pi R^2)$ in m² und $v$ die Windgeschwindigkeit in m/s bedeuten. Im Mittel kann man bei statistischen Berechnungen $\eta = 0{,}2$ annehmen. Eine Dichtekarte (Windmotorenzahl auf Flächeneinheit) mit eingezeichneten Isodynamen gibt die Verhältnisse in den einzelnen Gouvernements an. Nach Svante Arrhenius ist die jährliche Windkraft $5 \cdot 10^3$ mal größer als die Energie der jährlichen Kohlenausbeute. Die Entwicklungsgeschichte des Windmotors und der Windmotorforschung (Pomorzef, Paul de la Cour, Eiffel, Joukowsky, Prandtl, Betz, Szabinin) zeigt den Uebergang vom unwirtschaftlichen mehrflügeligen Langsamläufer ($\eta = 0{,}2$ bis $0{,}25$) zum wirtschaftlichen vier-, drei- und zweiflügeligen Schnelläufer ($\eta = 0{,}4$ bis $0{,}5$). Der Mensch ging beim Bau der vierflügeligen Windmühle instinktiv den richtigen Weg. Der zurzeit vollkommenste Schnelläufer ist der in der Windmotorenabteilung des Z. A. H. I. entwickelte zweiflügelige Z. A. H. I.-Schnelläufer Bauart N. E. J.[1]).

[1]) N. E. J. = Nikolai Egorowitsch Joukowsky.

Windmotore werden vorteilhaft mit Wasserkraftspeichern verbunden.

Versuche mit Langsamläufern und wirtschaftlichen zwei- und vierflügeligen Schnelläufern zeigen folgende grundlegende Tatsache, daß eine Verbesserung der Flügelgleitzahl bis $\varepsilon = 0{,}05$[2]) den Wirkungsgrad von Langsamläufern wenig erhöht, dagegen den der Schnelläufer in die Nähe des theoretischen Höchstwirkungsgrades ($\eta_{max} = 0{,}592$) bringt; auch ist die Flächenleistung (PS/m²) und Leistung pro Flügelflächengewicht beim Schnelläufer weit höher. Der Wirkungsgrad des zweiflügeligen Z. A. H. I.-Schnelläufers Bauart N. E. J. ist $\eta \div 0{,}45$ bis 0,5, wobei eine größere Drehzahl kleinere Uebersetzungszahlen beim Antrieb von Elektrogeneratoren gestattet. Der einzige Uebelstand des Schnelläufers ist der kleine Anfahr-Drehmoment, welcher sich durch Bau von drehbaren Schwenkflügeln mit Hornrudern (Flettnerflügeln) meistern läßt.

Die Versuche von Eiffel in Champs d'Auteuil mit zweiflügeligen Schnelläufern enthalten einen scheinbaren Widerspruch mit der Theorie, welcher aber nach Prandtl vollends geklärt werden kann. Die Z. A. H. I.-Schnelläufer haben oft J-Profile[3]) mit $\delta/l = 0{,}1$ (in Göttinger Schreibweise: $d/l = 0{,}2$) und $\varepsilon \div 0{,}02$ bis 0,01[2]) (Profilgleitzahl $\varepsilon_p = 0{,}01 \div 0{,}009$).

Windkraftwerke mit Kraftspeicher und Hilfskraftquelle lassen sich in folgender Art zeichnerisch untersuchen: aus dem Schaubild des vorangeschlagten Leistungsbedarfes, dem — nach etwa 10 jährigem statistischem Material — zu entwerfenden Windgeschwindigkeitsschaubilde und der Leistung des Kraftspeichers wird die Differenz der Wind- und Solleistung — welche negativ oder positiv ausfallen kann — gebildet. Ersteres zeigt die nötige Leistungsentnahme aus der Hilfskraftquelle, das zweite den verfügbaren Leistungsüberschuß des Kraftspeichers auf den nächsten Tag. Eine einfache Kostenrechnung ergibt bei vernünftiger Amortisation und Inbetrachtziehen der lokalen Strompreise, Anschaffungs- und Betriebskosten die Wirtschaftlichkeit der Anlage. Eine absolut betriebssichere Windkraftanlage erfordert einen starken Kraftspeicher mit einer Mindestentladungsdauer von 30 bis 45 Tagen.

Die Leistung eines Windmotors ist eine Funktion der Jahresmittelwindgeschwindigkeit, wobei unter der Voraussetzung gleicher Anschaffungskosten die Leistung mit der 1,66-Potenz der Jahresmittelwindgeschwindigkeit steigt, d. h. bei konstantem Drehmoment ist

$$N = c \cdot (v_{Jm})^{1{,}66} \quad \ldots \ldots \ldots (2).$$

Amerikanische Langsamläufer (mehrflügelige »Aermotor«-Bauart) sind überlastbarer als zwei- und vierflügelige Schnelläufer Bauart Z. A. H. I. N. E. J. haben aber kleinere Wirkungsgrade ($\eta = 0{,}3$ und $\eta = 0{,}45$ bis 0,5). Letztere werden nach der älteren elementaren Wirbeltheorie der Schraube von Joukowsky-Szabinin-Jurief berechnet. Die Verdrehung der Flügel erfolgt mittels eines durch ein Flettnerruder gesteuerten Hilfsmotors; bei hohen Drehzahlen erfolgt Massensteuerung.

Nach einer Untersuchung des zweitgenannten Verfassers läßt sich der Kreiselmoment bei Drehung eines Windrades mit wagerechter Drehachse um eine senkrechte Achse durch die Gleichung:

$$M = J \cdot \omega \cdot \omega_1 \quad \ldots \ldots \ldots (3)$$

darstellen, indem $J$ das axiale Trägheitsmoment des Windrades um seine Drehachse, $\omega$ die Winkelgeschwindigkeit des Windrades und $\omega_1$ die Winkelgeschwindigkeit des Systems um die Hochachse bedeuten. Das Inwindstellen kann durch lange Pfeilflossen und durch einen kleinen Einstellwindmotor erfolgen. Aus nicht ganz durchsichtigen Gründen hält Verfasser die zweite Anordnung für vorteilhafter.

[2]) Stets auf die (Göttinger) Seitenverhältniszahl $\lambda = 5$ bezogen.

[3]) J-Profile = Joukowsky-Profile.

**Der induzierte Widerstand von Flugzeugtragflügeln.** Ein Aufsatz von B. N. Jurief (Berichte des Zentralen Aero-Hydrodynamischen Institutes in Moskau, Heft 20. Moskau 1926) enthält eine elementare Wiedergabe der Prandtlschen Theorie von Tragwerken endlicher Spannweite. Sie ist in Rußland erst 1920 bekannt geworden, obwohl Ansätze dazu schon in noch unveröffentlichten Werken von N. E. Joukowsky und S. A. Tschaplygin vorhanden sind. Das Z. A. H. J. hat in Rußland das dimensionslose Beiwertsystem eingeführt, wobei allerdings wegen der Beibehaltung des doppelten Staudruckes ($2\,q$) die neuen russischen Beiwerte zweimal so klein als die deutschen sind, d. h.

$$K_y = c_a : 2, \quad K_x = c_w : 2 \quad \text{und} \quad K_m = c_m : 2 \; . \; . \; (1).$$

Nach elementarer Deutung der Zirkulations- und Wirbelbegriffe und der Helmholtzschen Sätze erfolgt die übliche Ersetzung des Flügels durch Wirbel. Eine elementare Ableitung des Joukowskyschen Satzes für den endlichen Tragflügel wird mittels des Impulssatzes und nach Biot-Savart erledigt. Bei der elementaren Theorie des Eindeckerflügels wird — mit einer für die praktische Anwendung genügenden Genauigkeit — der Profilwiderstand im Bereich der üblichen Flugwinkel als konstant angenommen. Ein Vergleich des Profil- und Reibungswiderstandes führt zu einer Schätzung der Höchstgleitzahl eines modernen Flügels $\varepsilon = 0{,}045$ (bei $\lambda = 5$). In einer nicht ganz durchsichtigen und richtigen Art erfolgt eine Untersuchung von Windwalzenflügeln, Düsenflügeln und Flügeln mit beweglicher Haut — bei allen diesen Bauarten wird eine künstliche Erhöhung der Zirkulation erstrebt. In der Joukowskyschen Fundamentalgleichung

$$A = \Gamma \cdot \varrho \cdot b \cdot v \quad \ldots \ldots \ldots (2).$$

($\Gamma$ Zirkulation, $\rho$ Dichte, $b$ Breite, $v$ Fluggeschwindigkeit) läßt sich $v$ konstruktiv am leichtesten, $b$ dagegen schwerer erhöhen. Am ergiebigsten scheint die Möglichkeit der Vergrößerung von $\Gamma$; eine bedeutende Vergrößerung der Profilgleitzahl ist beim normalen (gan-

zen) Flügelprofil schwer zu erreichen ($\varepsilon_{p\,max}$ = 0,01 ÷ 0,0084).

Die Betzschen Umrechnungsformeln führen zu der einfachen Mehrdeckertheorie (ohne Berücksichtigung der Staffelung) und den ausführlich begründeten Munkschen Sätzen; es werden auch die Näherungsformeln für kreis- und gitterförmige Mehrdecker von Bader und Prandtl gegeben. Eine elementare Betrachtung führt weiter auf die Z. A. H. I.-Berichtigungsformel für Eindeckermodelle im kreisförmigen Windstrahle, welche in deutschen Bezeichnungen lautet:

$$W' = A^2 : 8 \cdot q \cdot F_0 \quad \ldots\ldots \quad (3).$$

($W'$ zusätzlicher Widerstand, $A$ Auftrieb, $q$ Staudruck, $F_0$ Strahlquerschnitt). Jurief betont, daß sich diese Formel von der Prandtlschen lediglich durch das Fehlen des Klammerausdruckes

$$\vartheta = \left[1 + \frac{3}{16}\left(\frac{C}{D}\right)^4 + \frac{5}{64}\left(\frac{C}{D}\right)^8 + \frac{175}{4096}\left(\frac{C}{D}\right)^{12} + \ldots\right] \quad \ldots \quad (4).$$

($C$ Spannweite, $D$ Strahldurchmesser) unterscheidet, welchen man aber praktisch gleich 1 einsetzen kann (als guter Mittelwert wird $\vartheta = 1{,}009$ empfohlen).

Die »feinere« Eindeckertheorie untersucht die elliptische und beliebige Zirkulationsverteilung, wobei der wirkliche Rechnungsvorgang nach den Betzschen Näherungsformeln und dem Prandtl-Pohlhausenschen Schaubilde ausgeführt wird. Flügel mit beliebiger Umrißform werden nach einer etwas plumpen zeichnerischen Methode erledigt. Diese Methode ist dienlich (auch bei Untersuchung der statischen Stabilität) verwickelter Flügelumrißformen. Es folgt die Theorie der günstigsten Mehrdecker und Abwindrechnungen (Munksche und amerikanische Formeln).

An Hand der gewonnenen Ergebnisse werden die statische Längsstabilität und die Flugzustände untersucht; eine »Modernisierung« der sog. drei Theoreme von A. Penaud gestattet einen tieferen Einblick in ihr Wesen. Die Untersuchungen des Z. A. H. I. an Flügeln mit Ausschnitten stimmen mit denen von Göttingen überein.

**Versuche an Windkanalmodellen und Gebläseschrauben** wurden von K. Baulin in dem Z. A. H. I. Moskau ausgeführt (Berichte des Zentralen Aero-Hydrodynamischen Instituts in Moskau, Heft 7, 1924). In der Zeit vom 20. September 1923 bis 20. Januar 1924 wurden von K. Baulin und K. Bunkin Versuche mit einem ganzen Windkanalmodell (Bauart B. N. Jurief), Windkanaleinzelteilen und Gebläseschrauben gemacht. Das Z. A. H. I. benötigte neue Windkanalanlagen mit größeren Kennwerten, wobei das Material französischer und amerikanischer Versuche lückenhaft und ungenügend erschien (G. Eiffel, Résumé des principaux travaux exécutés pendant la guerre: Souffleries aerodynamiques, Paris 1918 und Reports of the National Advisory Committee for Aeronautics, U. S. A. NN 73, 83 und 98; Washington 1919). Auch war eine Vergrößerung der Wirtschaftlichkeit der Anlagen bei den sich stetig vergrößernden Abmessungen und Windgeschwindigkeiten erstrebt. Außer ihrem eigentlichen Zweck gaben diese Versuche wertvolle Fingerzeige beim Bau anderartiger aerodynamischer Geräte, wie z. B. Gebläse und ihre Rohrleitungen, Düsen für Reaktionsfluggeräte und manches andere. Diese systematischen Versuche konnten (wie in Göttingen) nur mit Unterbrechungen für dringende Untersuchungen für die Flugzeugwerke ausgeführt werden. Es wurden im ganzen drei Versuchsreihen:

1. Untersuchungen von Diffusoren,
2. Untersuchungen an einem ganzen Windkanalmodell und
3. Untersuchungen an Windkanalgebläsen

— insgesamt 98 Versuche — ausgeführt.

1. Die Versuche wurden nach der Methode von Eiffel ausgeführt, zu welchem Zwecke man den »kleinen« flachen Z. A. H. I.-Windkanal mit einer (Eiffelschen) Unterdruckkammer versah, an welcher die zu untersuchenden Diffusormodelle mit Auffangtrichter (Kollektor) angeschlossen wurden. Als Charakteristikum (»Gütegrad« λ) des Modells diente das Verhältnis der Unterdrucke im Arbeitsquerschnitt ($h$) und der Kammer ($H$), d. h.

$$\lambda = h : H \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

(beides in mm Wassersäule).

Die ersten Versuche betrafen die Ermittlung der günstigsten Querschnittform (kreisförmig, achteckig oder quadratisch). Der Arbeitsquerschnitt aller drei Modelle war $F_0 = 78{,}6\ \text{cm}^2$ ($D_0 = 10$ cm), Länge des zylindrischen Arbeitskanals $L = 2\,D_0$ (20 cm), Diffusorlänge 60 cm, Diffusoraustrittsquerschnitt $F_1 = 4\,F_0$ (314,4 cm²). Die Versuche ergaben:

| Querschnitt | Gütegrad λ | Verhältnis |
|---|---|---|
| **Kreisförmig** . . . . . | 3,59 | 1 |
| **Achteckig** . . . . . | 3,52 | 1,02 |
| **Quadratisch** . . . . . | 2,97 | 1,18 |

Wegen dieser Ergebnisse und aus baulichen Gründen entschloß man sich für den Bau eines Windkanals mit achteckigem Querschnitt.

Nun folgten Versuche mit normalen konischen und krummwandigen Diffusoren und zwar:

1. Normaler gerader konischer Diffusor: $F_1 : F_0 = 4$, $L = 60$ cm.
2. Krummwandiger Diffusor: $F_1 : F_0 = 4$, $L = 60$ cm.
3. Krummwandiger Diffusor nach B. W. Korostelef: $F_1 : F_0 = 4$, $L = 18{,}1$ cm.

Modell 3 wurde in der Annahme, daß man bei einer nur geringen Gütegradverschlechterung mit einem bedeutend kürzeren krummwandigen Diffusor auskommt, gebaut. Die theoretischen Grundlagen des Entwurfes waren:

1. Der Verlustbeiwert ist der Winkeländerung zwischen der Tangente der erzeugenden Kurve und der Achse verhältig und 2. Der Strömungsverlust auf die Längeneinheit des Diffusors ist konstant. Diese Voraussetzungen erwiesen sich als falsch, da der Gütegrad λ des Modells 3 um 2,65 mal kleiner war als am Modell 1. Daher entschloß man sich auch für einen geraden konischen Diffusor.

Versuche zur Ermittlung des günstigsten Oeffnungswinkels waren zur Zeit der Drucklegung noch nicht abgeschlossen. Versuche zeigten, daß eine Vergrößerung des Oeffnungswinkels des Diffusors zu starken Schwankungen, ja zum Abreißen der Strömung von der Kanalwandung führt; Oeffnungswinkel von 8° bis 10° haben sich als günstig erwiesen.

2. Es wurde ein ganzes Windkanalmodell ($^1/_8$ n. Gr.) der »zusammengesetzten« Bauart B. N. Jurief mit ringförmigem Rücklaufdiffusor untersucht. Ein Freistrahler nach Göttinger Muster wurde trotz einiger Versuchsbequemlichkeiten wegen der großen inneren Reibung der Luft, welche rund 13 mal so groß als die Wandreibung ist, verworfen. Die Eigenart des Juriefschen Windkanales besteht in der Möglichkeit seiner Anwendung als Ganzes — zur Untersuchung kleinerer Modelle — und seiner Zerlegung in zwei Teile zur Untersuchung größerer Modelle und größerer Einzelteile in natura (Abb. 1). Das Modell hatte eine Länge von 6050 mm und einen Durchmesser des ersten Arbeitsteiles von 375 mm (in nat. Gr. 3,0 m) und des zweiten von 750 mm (in nat. Gr. 6,0 m). Also ist der Kennwert der Anlage bei einer Höchstwindgeschwindigkeit von 104 m/s rund 3120 bezw. 6240 m²/s. Die Inzweiteilung des Kanals erfolgt durch Abnahme des ringförmigen Zwischenteils (Abb. 1 — schwarz), wobei sich der als Auffangtrichter ausgebildete Vorderteil des »großen« Windkanals entblößt. Der Rückstrom der Luft hinter dem Gebläse erfolgt durch den Rücklaufringdiffusor, welcher aus der äußeren konischen Mantelfläche des zweiten »großen« Arbeitsteiles und den zylindrischen Hallenraumwandungen gebildet wird. Untersuchungen zeigten einen Gütegrad λ = 4,34. Der zuerst schlecht ausgeführte Gleichrichter verursachte zuerst einen Verlust der kinetischen Energie im zweiten Arbeitsteil von 25 vH, welcher bei der zweiten Ausführung auf 15 vH verringert wurde. Der Rücklaufringdiffusor vergrößerte den Wirkungsgrad um 22,5 vH. Nach einem älteren Vorschlage von Joukowsky wurden Versuche mit vor dem Auffangtrichter aufgestellten besonders geformten Schildern ausgeführt; die Versuche zeigten aber eine Verschlechterung des Gütegrades und des Stromfeldes. Die Querkonstanz der Geschwindigkeit war gut, die Längskonstanz genügend, die zeitliche Konstanz ließ zu wünschen übrig. Versuche zeigten auch die Notwendigkeit, den zweiten großen Teil des Windkanals einzeln zu benutzen.

3. Es wurden zwei nach der Joukowskyschen Wirbeltheorie der Schraube berechneten Gebläseschrauben untersucht. Beide Schrauben hatten gleichen Durchmesser von 0,7 m und waren für eine Höchstwindgeschwindigkeit im Arbeitsquerschnitt von 50 m/s berechnet; erste Schraube zweiflügelig, normale Drehzahl 4000 Umdr./min, zweite vierflügelig, normale Drehzahl 2500 Umdr./min. Der Schraubendrehmoment wurde mittels einfacher Kippwage ermittelt. Die Versuche zeigten die für die Feinregelung wichtige Linearität zwischen Windgeschwindigkeit, Leistung, Zugkraft und Drehzahl — als Ergebnis wurde die zweite Schraube gewählt. Die Stromfeldmessungen hinter der Schraube erfolgten in üblicher Weise mittels Seidenfahnen und einem Pitotrohr, Bauart Z. A. H. I. (der Prandtlschen Bauart ähnlich, aber mit vier seitlichen, unter 49° zur Achse geneigten Oeffnungen versehen, welche eine äußerst genaue Einstellung des Gerätes gestatten). Die Versuche zeigten ungleichmäßige Querverteilung der Geschwindigkeiten hinter dem Gebläse, weshalb dort eine künstliche Querschnittsverengung von 30 vH ratsam erschien.

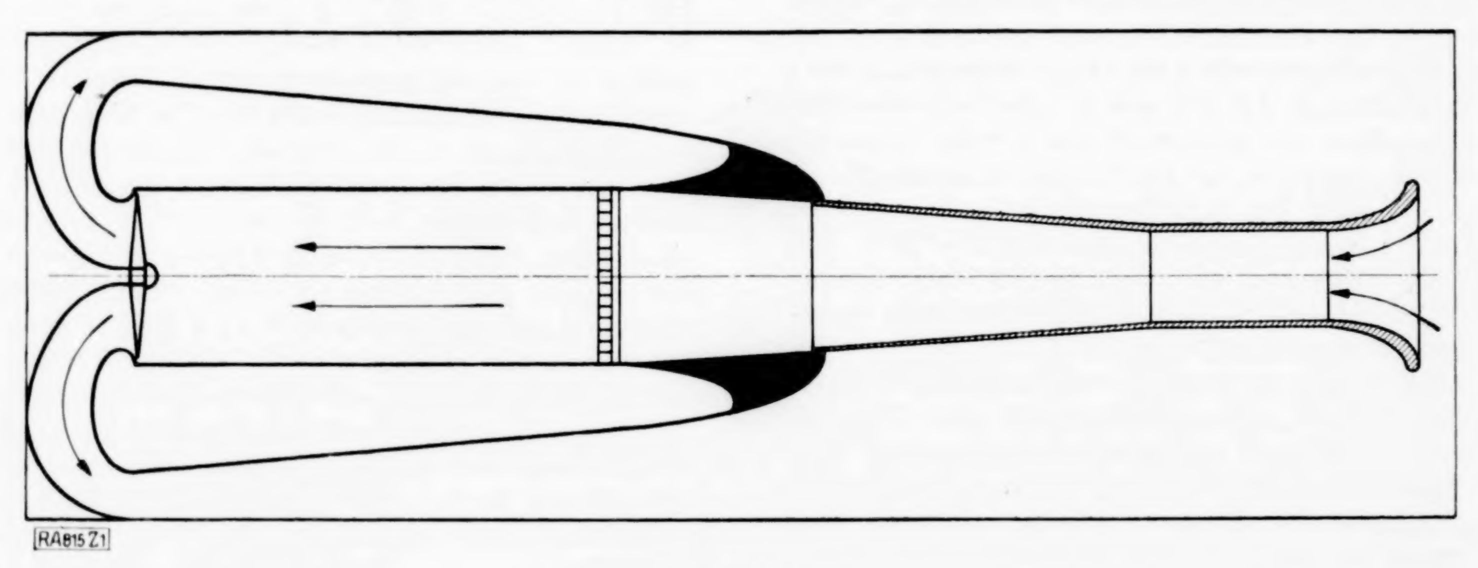



Abb. 1.

**Luftströmung im flachen, erweitertem Kanal.** Versuche über Luftströmung im flachen, erweiterten Kanal wurden von A. N. Vedörnikoff in dem Z. A. H. I. Moskau ausgeführt. (Berichte des Zentralen Aero-Hydro-

dynamischen Institutes in Moskau, Heft 21. Moskau 1921.) Zweck der Untersuchungen war die Bestimmung des Einflusses der Größe des Oeffnungswinkels eines Diffusors auf den Strömungsvorgang in ihm. Die Versuchsergebnisse sollten hauptsächlich Anhaltspunkte beim Entwurf der Diffusoren des großen zusammengesetzten 6 m-Windkanals von Jurief geben, waren aber auch für andere industrielle Anlagen von Bedeutung. Die Versuche wurden an einem flachen erweiterten Kanal mit quadratischer (100 × 100 mm, $F_1 = 0{,}01$ m²) Eintrittsöffnung und einer Länge von $L = 10 \times 100$ mm = 1,0 m ausgeführt. Durch Einbau drehbarer Seitenwände konnte man die Strömung bei Oeffnungswinkeln zwischen 0° und 28° untersuchen. Ein Glasdeckel mit eingeätztem Quadratmaschennetz gestattete die visuelle Beobachtung der Seidenfahnen. Die Druckverteilungsmessungen erfolgten in üblicher Weise mittels einer Reihe von Stauröhrchen mit Mehrfach(Orgel)manometer; die Pitotröhre Bauart Z. A. H. I. erwies sich als sehr gut, so daß eine Eichung des Gerätes kaum erforderlich war: der Korrekturfaktor $\xi$ war in der üblichen Gleichung:

$$v = \sqrt{\xi \frac{2\,h}{\varrho}} \quad \ldots\ldots\ldots (1)$$

$\xi = 1{,}005$. Die Versuche wurden bei 14 (Differenz 2°) Oeffnungswinkeln ausgeführt. Als »Gütegrad« ($\lambda$) wurde wiederum das Verhältnis des Unterdruckes an der Eintrittsöffnung ($h_1$) zum Unterdruck an der Austrittsöffnung ($h_2$) genommen, d. h.

$$\lambda = h_1 : h_2 \quad \ldots\ldots\ldots (2).$$

Da nun die Querverteilung der Geschwindigkeiten und der Unterdrucke an der Eintrittsöffnung sehr ungleichmäßig ist, so wurde an drei Punkten gemessen, d. h.

$$\lambda = \frac{h_1{}^1 + h_1{}^2 + h_1{}^3}{3} : h_2 \quad \ldots\ldots (3).$$

Durch Betrachtung bzw. Photographieren der Seidenfahnen ergeben sich Stromfeldbilder. Bis zum Oeffnungswinkel ($\alpha$) von 14° machte sich keine Wirbelbildung noch Abreißen der Strömung bemerkbar:

bei $\alpha = 14°$ leichte Wirbelbildung an der Wandung,
bei $\alpha = 16°$ vergrößerte Wirbelbildung, Bildung eines schwachen Rückstromes,
bei $\alpha = 18°$ Vergrößerung der Wirbelschicht und des Rückstromgebietes. Unstationäre Bewegung,
bei $\alpha = 20°$. Die Wirbel werden stabiler; scharf ausgeprägtes Rückstromgebiet,
bei $\alpha = 22°$ beinahe dasselbe Strömungsbild,
bei $\alpha = 24°$ die Wirbelschicht dringt in die Nähe der Eintrittsöffnung vor,
bei $\alpha = 26°$ fast die ganze Strömung ist unstationär. Die Wirbel dringen fast zur Eintrittsöffnung vor.

Es wurde *stets ein einseitiges* Abreißen der Strömung beobachtet. Die Abhängigkeit des Gütegrades vom Oeffnungswinkel ist in folgender Zahlentafel für zwei Strömungsgeschwindigkeiten ($v_2 > v_1$)

| Oeffnungswinkel $\alpha$ | Gütegrad $\lambda$ | |
|---|---|---|
| | $v_1$ | $v_2$ |
| 0° | 0,825 | 0,820 |
| 2° | 1,230 | 1,250 |
| 4° | 1,850 | 1,860 |
| 6° | 2,480 | 2,500 |
| 8° | 3,100 | 3,100 |
| 10° | 3,570 | 3,600 |
| 12° | 3,940 | 3,820 |
| 14° | 4,130 | 3,960 |
| 16° | 3,650 | 3,550 |
| 18° | 3,140 | 3,100 |
| 20° | 2,780 | 2,360 |
| 22° | 2,420 | 2,100 |
| 24° | 1,940 | 1,930 |
| 26° | 1,780 | 1,830 |
| 28° | 1,610 | 1,500 |

Ein analytischer Ausdruck für $\lambda = f(\alpha)$ wurde nicht gesucht. Das Schaubild der Zahlentafel zeigt ein schnelles Steigen des Gütegrades bis zum Höchstwert $\lambda = 4{,}13$ bei $\alpha = 14°$ was mit den Erscheinungen an den Strömungsbildern in vollem Einklange steht. Eine Auswertung der Isobarenmessung zeigt einen stetigen Verlauf bei $8° \leq \alpha \leq 12°$; die Querverteilung der Geschwindigkeiten war genügend gleichmäßig. Eine Abschätzung der Reibungs- und der hydraulischen Verluste ergibt ihren Kleinstwert bei einem Oeffnungswinkel $\alpha = 8°$.

Als endgültiges Ergebnis der Versuchsreihe sind folgende Schlüsse zu betrachten: Diffusoren sollen einen Oeffnungswinkel von $\alpha = 8°$ bis 10° haben bei welchen Winkeln der Gütegrad zwischen $\lambda = 3{,}1 \div 3{,}6$ schwankt, die summaren Verluste aber ihren Kleinstwert erreichen. Dies Erkenntnis ist ausschlaggebend beim Entwurf des Rückstromringdiffusors des großen Juriefschen Windkanals gewesen. Die theoretischen Rechnungen sind von S. A. Tschaplygin durchgeführt. Die Versuche bestätigen die theoretischen Ergebnisse von Tschaplygin, wonach Wirbel in einer durch einen Diffusor strömenden idealen Flüssigkeit instabil sind.

Ueber **Strömung des Wassers im offenen Kanal und Strömung von Gasen in Rohren** berichten N. E. Joukowsky und N. G. Tschentzoff (Berichte des Zentralen Aero-Hydrodynamischen Institutes in Moskau Heft 1. Moskau 1925). Es besteht eine Analogie zwischen der Strömung von Gasen in einem zylindrischen Rohre mit Wandreibung und der Strömung von Wasser in einem offenen rechteckigen Kanal mit Reibung an den Seitenwänden. Das Ergebnis der interessanten Untersuchung ist folgendes: in beiden Fällen ist eine stationäre Strömung des Wassers (Gases) nur bis zur Stelle möglich, bei der die Geschwindigkeit ($v$) des Wassers (Gases) der Wellengeschwindigkeit ($\lambda$) an der freien Oberfläche bzw. Schallgeschwindigkeit ($c$) im Gase gleich ist, wobei es gleichgültig ist, ob in diesem Kanal- bzw. Rohrteile $v < \lambda$ bzw. $v < c$ oder

$v > \lambda$ bzw. $v > c$ ist. Im ersten Falle wird sich $v$ bis zu $v = \lambda$ bzw. $v = c$ erhöhen, im zweiten Falle sich $v$ bis zu $v = \lambda$ bzw. $v = c$ kleiner werden. Eine stetige stationäre Strömung unter dieser Stelle ist unmöglich. G. A. Tschaplygin zeigte formal, daß hinter dieser Stelle ($v = \lambda$ bzw. $v = c$) sich keine stetige stationäre Strömung ausbilden kann, gab aber für diese Behauptung keine physikalische Begründung. Diese gab nun Joukowsky für Wasser in folgender einfacher Betrachtung: die erste Ableitung des summaren Leistungsausdruckes

$$E = m\left(\frac{1}{2}\frac{Q^2}{b^2 y^2} + g\,y\right) \quad \ldots\ldots (1)$$

$$m = \varrho\, b\, y\, d\,x \quad \ldots\ldots\ldots (2)$$

($E$ Leistung, $Q$ Durchflußmenge in der Zeiteinheit, $b$ Kanalbreite, $y$ Höhe des Wasserspiegels, $g$ Erdschwerbeschleunigung, $\varrho$ Dichte, $X$ Achse $\parallel$ der Kanalachse) liefert wegen $d^2 E/dv^2 > O$ die dem Kleinstwert der Leistung

$$E_{\min} = \frac{2}{3}\, m \sqrt[3]{\frac{Q^2 g^2}{b^2}} \quad \ldots\ldots (3)$$

entsprechende Strömungsgeschwindigkeit, welche der Wellengeschwindigkeit gleich ist. Die Höhe des Wasserspiegels an dieser Stelle ist:

$$y = \sqrt[3]{\frac{Q^2}{b^2 g}} \quad \ldots\ldots\ldots (4).$$

Bei jeder anderen Strömungsgeschwindigkeit $v < \lambda$ oder $v > \lambda$ ist $E_v > F_{\min}$. Da nun eine Energievermehrung des strömenden Wassers physikalisch unmöglich ist, ja im Gegenteil die Wandreibung eine Energieentnahme veranlaßt, so ist die Annahme einer weiteren stetigen stationären Strömung des Wassers falsch. Die Rechnungen wurden unter folgenden Annahmen ausgeführt: 1. die physikalischen Eigenschaften und Geschwindigkeiten sind an jeder Querschnittstelle konstant und 2. die Reibung ist der Reibungsfläche und der zweiten Potenz der Strömungsgeschwindigkeit verhältig. Zur Verifizierung der theoretischen Ansätze wurden im Institut für Mechanik der Universität Moskau Versuche mit Ausströmen von Druckluft (7 at) aus einer 200 mm langen Röhre mit 2 mm lichtem Durchmesser durchgeführt. Die Druckmessung erfolgte in üblicher Weise durch eingebohrte Löcher (15 Oeffnungen in einer Entfernung von 13,35 mm). Die Versuche zeigten einen Druckabfall bis auf 4 at an der Rohrmündung. Die allgemeinen Schlußfolgerungen bestehen aber auch, wenn die Reibung einer beliebigen Potenz der Dichte verhältig ist.

Derselbe Fragenkomplex der Analogie zwischen der Flüssigkeitsströmung in einem engen Kanal und Strömung von Gasen bei hohen Geschwindigkeiten führt bei etwas geändertem Reibungsgesetz — die Reibung ist der ersten Potenz der Dichte verhältig — zu denselben Ergebnissen. Im Falle eines adiabatischen Prozesses, d. h. wenn:

$$p = k\,\gamma^{\mu} \quad \ldots\ldots\ldots (5)$$

($p$ Druck, $\gamma$ Dichte, $\mu = 1{,}4$) kommt man im Falle sich konisch erweiternder Rohren (Düsen und Diffusoren) bei Vernachlässigung der Reibung, zu folgenden Ergebnissen: Die Dichteverteilung längst der geometrischen (X)-Achse ist gerechnet vom Ursprung der den Diffusor bildenden Konusfläche durch die Gleichung:

$$\frac{1}{x^4} = \frac{\mu}{\mu + 1}\, k \cdot g \cdot \frac{\sigma^2}{Q^2}\left(\gamma_0^{\mu-1} - \gamma^{\mu-1}\right)\gamma^2 \,. \quad (6)$$

gegeben ($x$ Entfernung vom Ursprung, $g$ Erdbeschleunigung, $Q$ Durchflußmenge in der Zeiteinheit, $\gamma_0$-Dichte an der Stelle $1 : x_4 = 0$, d. h. $x = \infty$ und $\sigma$ aus der Gleichung $f = \sigma\, x^2$ ($f$ = normale Kegelschnittfläche) bestimmt wird.)

In Gl. (6) wird x zum Minimum, wenn

$$2\,\gamma_1\,\gamma_0^{\mu-1} - (\mu + 1)\,\gamma_1^{\mu} = 0 \quad \ldots (7),$$

d. h. bei

$$\gamma_1 = \gamma_0 \left(\frac{2}{\mu + 1}\right)^{\frac{1}{\mu - 1}} \quad \ldots\ldots (8).$$

Eine stationäre Strömung ist nur im breiteren Teil des Diffusors möglich. Die Untersuchung einer Strömung von Wasser (Gas) in einem Kanal (zylindrischen Rohre) mit Unstetigkeitsstellen (Druck und Geschwindigkeitssprünge, d. h. $d\,p : d\,x = \infty$ und $d\,v : d\,x = \infty$) gibt Gleichungen für die Geschwindigkeit des Wassers

$$v_1 = \frac{1}{4}\frac{\lambda^2}{v} + \sqrt{\frac{\lambda^4}{16\, v^2} + \frac{\lambda^2}{2}} \quad \ldots (9),$$

wo

$$\lambda = \sqrt{g \cdot y} \quad \ldots\ldots (10)$$

die Wellengeschwindigkeit an der Oberfläche bedeutet ($v$ Geschwindigkeit vor der Unstetigkeitsstelle, $g$ Erdschwerebeschleunigung, $y$ Höhe des Wasserspiegels) und des Gases:

$$v_1 = \frac{v\,(\mu + 1) + 2\,\dfrac{\lambda^2}{v}}{(\mu - 1) + 2} \quad \ldots\ldots (11)$$

($\lambda^2 = g\,\dfrac{p}{\gamma}\,\mu$) nach der Unstetigkeitsstelle.

Bei Flüssigkeitsströmung mit Reibung erfolgt Energiezerstreuung, da die Reibungswärme für die Bewegungsenergie verloren geht. Bei Strömung von Gasen unter Berücksichtigung der Wandreibung können folgende Grenzfälle eintreten: 1) Strömung, bei der die ganze Reibungswärme der Bewegungsenergie verloren geht. Die Energiezerstreuung erfolgt nach außen (Wärmeabgabe) oder nach innen (Wirbel). Der thermische Prozeß wird durch eine Adiabate gegeben und 2) Strömung, bei der die Reibungswärme dem Gase erhalten bleibt. Dieser Fall tritt annähernd bei engen gut wärmeisolierten Röhren ein. Der thermische Prozeß ist durch eine Polytrope mit wechselndem Exponenten angegeben.

Im ersten Falle ist der thermische Prozeß durch die Gleichung:

$$\frac{p}{p_k} = \frac{\dfrac{(\mu + 1)\,\mu\,\beta}{1 - \mu\,\beta} \cdot \dfrac{\varrho}{\varrho_k} + (\mu - 1)\left(\dfrac{\varrho}{\varrho_k}\right)^{\frac{\mu+1}{1-\mu\beta}} - 1}{\dfrac{\mu + 1}{1 - \mu\,\beta} - 2} \,. \quad (12),$$

wo $\beta = \xi \cot \alpha$ ($p_K$ und $\rho_K$ Druck und Dichte bei einer Strömungsgeschwindigkeit $v = c$,

$\beta$ Reibungsbeiwert und $\alpha$ der halbe Oeffnungswinkel) gegeben. Im Falle eines zylindrischen Rohres ist $\alpha = 0$ und $\beta = \infty$ und man hat

$$\frac{p}{p_k} + \frac{\mu+1}{2}\frac{\varrho}{\varrho_k} - \frac{\mu-1}{2}\frac{\varrho_k}{\varrho} \quad \ldots (13).$$

Im zweiten Falle eines polytropischen Prozesses hat man für ein zylindrisches Rohr

$$\frac{8\,\mu}{\mu+1}\,\xi \cdot \frac{x_K - x}{r} = \left(\frac{\varrho}{\varrho_K}\right)^2 - 1 - \ln\left(\frac{\varrho}{\varrho_K}\right)^2 \quad (14)$$

($X$ Achse $\parallel$ zur Rohrachse, $x$ Koordinate der Stelle bei der $v = c$) und für einen konischen Diffusor.

$$\frac{x}{x'_K} = \sqrt[4]{\frac{\dfrac{\mu+1}{2\,(1-\mu\,\beta)} - 1}{\dfrac{\mu+1}{2\,(1-\mu\,\beta)}\left(\dfrac{\varrho}{\varrho_K}\right)^2 - \left(\dfrac{\varrho}{\varrho_K}\right)^{\frac{\mu+1}{1-\mu\beta}}}} \quad (15).$$

($X$ Achse $\parallel$ zur Konusachse, $x$ Entfernung von der Konusspitze.)

Das **Problem der Reaktionsraumschiffe und der Reaktionsflugzeuge** ist von K. E. Ziolkowsky-Kaluga U. d. S. S. R. untersucht worden (Erforschung der Welträume mittels Reaktionsraumschiffe. Verlag der 6. Reichsdruckerei Kaluga U. d. S. S. R. 1926). Das keiner äußeren materiellen Stütze bedürftige Reaktionsraumschiff ist z. Zt. das einzige Fluggerät welches eine lenkbare Bewegung mit vernünftiger Beschleunigung im luftleeren Weltenraum gestattet; das Reaktionsflugzeug dient dem Schnellflug mit teilweiser Ueberschallgeschwindigkeit in der Stratosphäre. Der Luftwiderstand wirkt beim Raumschiff, beim Start hemmend, bei der Landung auf Planeten mit Gashülle kann er die Bewegung verringern. Das Raumschiff fliegt meistens in schwachen Schwerefeldern. Der Rückstoß erfolgt durch Verbrennen eines explosiven Gasgemisches (etwa $H_2 + O_2$), welche beide im verflüssigtem Zustande mitgenommen werden.

Wenn

- $m_1$ das Leergewicht des Raumschiffes
- $m_2$ die Brennstoffmasse beim Bewegungsanfang ($t = 0$),
- $m$ unverbrannter Brennstoffrest zum Zeitpunkte $t_1$,
- $v$ Fluggeschwindigkeit,
- $v_a$ Rückstromgeschwindigkeit der Massenteilchen des Gases,
- $b$ Schiffsbeschleunigung
- $g$ Erdschwerebeschleunigung und
- $R$ Erdhalbmesser

bedeuten, so liefert der Impulssatz sofort:

$$d\,v\,(m_1 + m) = -\,v_a\,d\,m \quad \ldots (1)$$

und durch Integration:

$$\int \frac{1}{v_a}\,d\,v = -\int \frac{d\,m}{m_1 + m} + c \quad \ldots (2)$$

und

$$\frac{v}{v_a} = -\ln(m_1 + m) + c \quad \ldots (3).$$

Bis zur ersten Explosion ($t = 0$) ist $m = m_2$, also

$$C = \ln(m_1 + m_2) \quad \ldots (4),$$

woraus:

$$\frac{v}{v_a} = \ln\left(\frac{m_1 + m_2}{m_1 + m}\right) \quad \ldots (5).$$

Das Raumschiff erhält seine Höchstgeschwindigkeit wenn $m = 0$, d. h.

$$v_{\max} = v_a \ln\left(1 + \frac{m_2}{m_1}\right) \quad \ldots (6).$$

Das Verhältnis $m_2 : m_1$ nennt man Massenverhältnis des Raumschiffes. Die Geschwindigkeit mit der man eine Masse behaften muß, damit das Schwerefeld eines Planeten für immer verläßt, ist die Grenzhubgeschwindigkeit, welche für die Erde

$$\boxed{v_\infty = \sqrt{2\,g\,R} = 11180\ \text{m/sec}} \quad \ldots (7)$$

und für andere Planete $v_\infty{}^1 = \sqrt{2\,g_p\,R_p}$ natürlich verschieden ist (z. B. für den Erdmond $v_\infty \approx 3900$ m/sec). Gl. (6) gilt für das Raumschiff im schwerelosen Raum oder praktisch schwachem Schwerefelde in einer Entfernung $> R$ von der Erdoberfläche. Für die Fluggeschwindigkeit im Erdschwerefelde (bei anderen Planeten wird $g$ durch $g_p$ ersetzt) erhält Ziolkowsky den Ausdruck:

$$v_2 = v_a\left(1 - \frac{g}{b}\right)\ln\left(1 + \frac{m_2}{m_1}\right) \quad \ldots (8),$$

wobei man

$$W_{dyn} = \left(1 - \frac{g}{b}\right) \quad \ldots (9)$$

als dynamischen Wirkungsgrad bezeichnet. Da $W_{dyn} < 1$, so ist $v_2 < v$, und nur bei einer einzigen großen Explosion (Abschuß) ist, wenn $b \gg g$, $W_{dyn} \sim 1$. Umgekehrt kann trotz größter Brennstoffmasse $m_2$ bei $b = g$, die Geschwindigkeit gleich 0 sein. Man erhält also für das Erdschwerefeld

| $b : g$ | $W_{dyn}$ | $b : g$ | $W_{dyn}$ |
|---|---|---|---|
| 1 | 0,00 | 6 | 0,83 |
| 2 | 0,50 | 7 | 0,86 |
| 3 | 0,66 | 8 | 0,87 |
| 4 | 0,75 | 9 | 0,89 |
| 5 | 0,80 | 10 | 0,90 |

Nun ist aber die vom Menschen erträgliche Höchstbeschleunigung nach H. Oberth, A. Zander, K. E. Ziolkowsky u. a. $b \approx 4\,g$ also $(W_{dyn})_{\max} = 0{,}75$, d. h. $v_2 = {}^3/_4\,v$.

Wenn man das Verhältnis der Raketenleistung zur Brennstoffleistung bildet, so erhält man für den schwerelosen Raum

$$\boxed{W_{en} = \frac{m_1}{m_2} \cdot \left[\ln\left(1 + \frac{m_2}{m_1}\right)\right]^2} \quad \ldots (10),$$

welchen Wirkungsgrad man als energetischen bezeichnet. Im Schwerefelde ist der energetische Wirkungsgrad

$$\boxed{W_{2\,en} = W_{en}\,W_{dyn}} \quad \ldots (11)$$

oder nach obengesagtem $W_{2en} = {}^3/_4\,W_{en}$. Das Ergebnis der Berechnungen läßt sich in folgender Zahlentafel zusammenstellen (das Um-

rechnen der Fluggeschwindigkeiten und Wirkungsgrade auf das Erdschwerefeld erfolgt durch einfaches Multiplizieren mit 0,75).

| $m_2 : m_1$ | $v_{max}$ (m/sec) bei $v_a = 5000$ m/sec | $v_{max}$ (m/sec) bei $v_a = 4000$ m/sec | $W_{en}$ vH |
|---|---|---|---|
| 0,1 | 472 | 378 | 8,8 |
| 0,2 | 910 | 728 | 16,5 |
| 0,3 | 1 310 | 1 048 | 22,9 |
| 0,4 | 1 680 | 1 344 | 28,2 |
| 0,5 | 2 025 | 1 620 | 32,8 |
| 0,6 | 2 345 | 1 876 | 36,7 |
| 0,7 | 2 645 | 2 116 | 40,0 |
| 0,8 | 2 930 | 2 344 | 42,9 |
| 0,9 | 3 210 | 2 568 | 45,8 |
| 1,0 | 3 465 | 2 772 | 48,0 |
| 2 | 5 490 | 4 392 | 60,3 |
| 3 | 6 900 | 5 520 | 63,5 |
| 4 | 8 045 | 6 436 | 64,7 |
| 5 | 8 960 | 7 168 | 64,1 |
| 6 | 9 730 | 7 784 | 63,0 |
| 7 | 10 395 | 8 316 | 61,7 |
| 8 | 10 985 | 8 788 | 60,5 |
| 9 | 11 515 | 9 212 | 58,9 |
| 10 | 11 990 | 9 592 | 57,6 |
| 15 | 13 865 | 11 092 | 51,2 |
| 20 | 15 220 | 12 176 | 46,3 |
| 30 | 17 170 | 13 736 | 39,3 |
| 50 | 22 400 | 17 920 | 31,0 |
| 100 | 26 480 | 21 040 | 21,0 |
| ∞ | ∞ | ∞ | 0 |

Aus dieser Zahlentafel ersieht man folgendes: Im schwerefreien Raum (praktisch bei Planeten mit kleinen Grenzhubgeschwindigkeiten) **wird der Höchstwert von** $(W_{en})_{max} = 64{,}7$ vH bei einem Massenverhältnis $m_2 : m_1 \approx 4$ (genau 3,997) erreicht; eine Vergrößerung von $v_a$ ergibt größere $v_{max}$ also Uebergrenzhubgeschwindigkeiten bei kleineren Masseverhältnissen. Außerdem steigt bei Vergrößerung von $v_a$ das Gebiet der Uebergrenzhubgeschwindigkeiten ($v_{max} > v_\infty$) immer mehr in den Bereich der wirtschaftlich günstigen Werte von $W_{en}$ ($W_{en} = 51{,}2 \div 58{,}9$ vH). Eine kurze Interpolationsrechnung zeigt, daß das Massenverhältnis eines mit verflüssigtem Wasserstoff und Sauerstoff arbeitenden Raumschiffes um von der Erde wegzukommen, gleich

$$\boxed{m_2 : m_1 \approx 18{,}9} \quad \ldots\ldots (12),$$

wobei

$$\boxed{W_{en} \approx 47{,}3 \text{ vH}} \quad \ldots\ldots (13).$$

Im schwerefreien Raume ist die Arbeit der Brennstoffmasseneinheit

$$A = v_{max}^2 : 2g \quad \ldots\ldots (14),$$

dagegen im Erdschwerefelde

$$A_2 = h + (v_{max}^2 : 2g) \quad \ldots. (15)$$

($h$-Hubhöhe).

Wenn wir die Bezeichnung

$$A_3 = v_a^2 : 2g \quad \ldots\ldots. (16)$$

einführen und bemerken, daß

$$A_2 : A = 1 - \frac{g}{b} \quad \ldots\ldots. (17)$$

ist, so hat man aus Gl. 8 die nötige Brennstoffmasse.

$$m_2 = m_1 \left( e^{\sqrt{\frac{A_2 \cdot b}{A_3 \cdot (b-g)}}} - 1 \right) \quad .. (18).$$

Hier ist $A_2$ der summare Posten der Arbeit zur Erlangung einer bestimmten Höhe, der Geschwindigkeit und Ueberwindung des Luftwiderstandes. Wenn wir das zum Abflug von einem bestimmten Himmelskörper nötige Massenverhältnis durch $m_2 : m_1 = c$ bezeichnen, so erfordert der Rückflug ein Massenverhältnis

$$c_1 = m_3 : m_1 = [(1+c)^2 - 1] \approx (1+c)^2 \quad (19),$$

d. h. für ein von der Erde startendes Raumschiff:

$$\boxed{c_1 = 395} \quad \ldots\ldots. (20).$$

Darum ist eine Gegengaslandung beim jetzigen Stand der Technik unmöglich und man muß zur Ausnützung der Luftkräfte greifen. Zur Erreichung kleiner Höhen ($c \leq 0{,}7$) kann man $c_1 \approx 2c$ ansetzen. Eine Landung auf einen anderen Himmelskörper mit Rückfahrt zur Erde erfordert ein Massenverhältnis:

$$c_2 = [(1+c_1)^2 (1+c_2)^2 - 1] \quad .. (21),$$

wo $c_2$ dieselbe Bedeutung wie $c_1$ aber für den anderen Himmelskörper hat. Technisch ist dies noch unmöglicher. Eine bedeutende Verkleinerung des Massenverhältnisses läßt sich durch eine Beschleunigung des Raumschiffes von der Erde aus erreichen. Dann ist das nötige Massenverhältnis

$$\frac{m_k}{m_1} = 1 - e^{\frac{v_{max} - v_k}{v_a}} \quad \ldots. (22),$$

wo $v_k$ die Anfangsgeschwindigkeit bedeutet. Dann ist stets $m_2 : m_1 > m_k : m_1$, und zwar variiert das Verhältnis zwischen 2 und 5. Wenn wir dies Verhältnis $\frac{m_2}{m_1} : \frac{m_k}{m_1}$ mit $q$ bezeichnen, so haben wir

| $V_{max}$ (m/sec) = | 8000 | 11 000 | 17 000 |
|---|---|---|---|
| bei $v_k = 5000$ m/sec $q =$ | 5,00 | 3,46 | 3,00 |
| bei $v_k = 4000$ m/sec $q =$ | 3,22 | 2,60 | 2,50 |
| bei $v_k = 3000$ m/sec $q =$ | 2,32 | 2,00 | 2,00 |

Da bei der kleinsten Anfangsgeschwindigkeit $v_k = 3000$ m/sec, das der Grenzhubgeschwindigkeit $v_{max} \approx 11\,000$ m/sec entsprechende Massenverhältnis $m_k : m_1 = 4{,}00$ ist, so ist $c_1 = 24$, d. h. eine Gegengaslandung wäre also im Falle einer Anfangsgeschwindigkeit technisch wohl ausführbar (so ist bei $v_{max} = 11\,000$ m/sec und $v_k = 5000$ m/sec, $c_1 = 9{,}92$ was technisch leicht ausführbar wäre).

Wirtschaftlicher als der senkrechte Aufstieg ist der Wagerechtflug (schwach geneigter Aufstieg da dabei nach kurzen Hilfsrechnungen man

$$W_{dyn} = \left[ 1 - \left( \frac{g}{b} \right)^2 \right] \quad \ldots. (23)$$

erhält; so ist z. B. bei $b:g = 4$, $W_{dyn} \approx 93{,}8$ vH (gegen 75 vH beim senkrechten Aufstieg). Beim Vernachlässigung des Luftwiderstandes ist dieser schwach geneigte Aufstieg wirtschaftlich.

Die beim geneigten (Resultierende Schiffsbeschleunigung $R = \sqrt{b^2 - g^2}$ ist nicht wagerecht). Aufstieg vom Raumschiff ausgenutzte Arbeit ist

$$\frac{R_\alpha \cdot t^2}{2}\left(\frac{R_\alpha}{g} - \cos\alpha\right) \quad \ldots \ldots (24),$$

wo

$$R_\alpha = (-R\cos\alpha)^2 \quad \ldots \ldots (25)$$

bedeutet ($\alpha$ Winkel zwischen $R$ und der senkrechten und $t$ Explosionsdauer.

Bei Berechnung der Luftkräfte benutzt Ziolkowsky den üblichen Ansatz

$$A = q \cdot F \cdot e_a, \quad W = q \cdot F \cdot e_w \quad \ldots (26)$$

und erhält für die Luftwiderstandsarbeit den Ausdruck

$$A = \frac{F \cdot (b - \sin\beta \cdot g) \cdot c_w}{\sin^2\beta} \cdot \varrho \cdot h^2 \quad \ldots (27)$$

und beim senkrechten Aufstieg ($\measuredangle \beta = 90^0$).

$$A = F \cdot (b - g) \cdot c_w \cdot \varrho \cdot h^2 \quad \ldots \ldots (28).$$

($F$ Hauptspantfläche des Raumschiffes, $c_w$ Widerstandsbeizahl, $\zeta$ Luftdichte in Meereshöhe, $h$ Hubhöhe, $\beta$ Flugbahnneigung zur Wagerechten). Das Verhältnis der Hubarbeit zur Luftwiderstandsarbeit

$$(m_1 + m_2) \cdot g \cdot h : A \quad \ldots \ldots (29)$$

ist sehr klein und an einem Beispiel 5400. Der Luftwiderstand hat also insbesondere bei großen $b:g$-Werten eine zu vernachlässigende Bedeutung. Nach Ansatz (26) werden auch Auftriebskräfte bei Reaktionsflugzeugen berechnet. L. Prandtl gibt zur Auftriebsberechnung bei hohen Unterschallgeschwindigkeiten ($v:c \longrightarrow 1$) folgende Betrachtungen: ... die Rechnung bezieht sich auf die Umströmung von flachen Profilen mit geringem Auftrieb und stellt fest, daß man mit einem solchen Profil bei einer Strömung in kompressibler Flüssigkeit dieselbe Druckverteilung bekommt wie in inkompressibler Flüssigkeit bei einem anderen Profil, dessen Querdimensionen im Verhältnis

$$\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-2} \quad \ldots \ldots \ldots (30)$$

überhöht sind. Aus dieser Ueberlegung folgt u. a., daß man in der Nähe der Schallgeschwindigkeit viel leichter ein Abreißen der Strömung bekommt als bei den geringen Geschwindigkeiten [1]).

H. Oberth benutzt auch den Ansatz Gl. (26), wobei aber nach Crantz und Becker die Widerstandsbeizahl eine nicht einfache (aber stetige und differenzierbare) Funktion der Geschwindigkeit ist. Bei $v < 300$ m/sec ist $c_w \approx$ const., steigt im Intervall $c < v < 425$ m/sec auf rund das 2,6 fache und nähert sich bei $v > 425$ m/sec dem 1,5 fachen Werte bei Unterschallgeschwindigkeiten.

Durch Erreichung großer $v_a$ Werte könnte man das Verhältnis $m_2 : m_1$ sogar $\ll 1$ machen. So ist bei $v_a = 3 \cdot 10^7$ m/sec ($\beta$-Strahlen) und $v_{max} = 1{,}7 \cdot 10^4$ m/sec das Verhältnis $m_2 : m_1 = 0{,}00057$ ($\sim 1:2000$), d. h. bei einem Fluggewicht des Raumschiffes von 10 t wäre das Gewicht der Zerfallstoffmasse rd. 5,7 kg. Diese ist also so klein, daß man sie in den Bewegungsgleichungen vernachlässigen darf — sonst lassen sich alle Gleichungen sinngemäß verändert, auf die zukünftigen durch elektrische Atomzertrümmerung arbeitenden Reaktionsraumschiffe anwenden.

Der Bau der Betriebsstoffbehälter ($H$ und $O$) ist ein thermisches (Wärmespannungen) und statisches Problem (Schiffsbeschleunigung) und Baustoffrage (desgleichen die Verbrennungskammer und Düse). Der Bestöffnungswinkel der Düse soll 5—6° betragen. Die Massensteuerung erfolgt durch Bewegung von drei zur Raumschiffslängsachse symmetrisch (unter 120°) angeordneter Massen — die Steuerung der Massen erfolgt elektrisch mittels eines Selenzellensystems, auf welches durch »Steuerperiskope« die Abbilder der angepeilten Lichtmarken (Fixsterne oder Sonne) fallen.

Berlin. A. B. Scherschevsky. 815

[1]) Nach einer freundlichen brieflichen Mitteilung von Hrn. Prof. Prandtl vom 15. Dez. 1926 aus dem Kaiser-Wilhelm-Institut für Strömungsforschung.

# KLEINE MITTEILUNGEN

**Maxwellsche Polyeder und Ausnahmefachwerke.** Frau Pollaczek-Geiringer hat vor kurzem unter dem Titel »Ueber die Culmannsche Gerade und Ausnahmefachwerke«[1]) für ebene Fachwerke einen einfachen Beweis für den von H. Liebmann bereits für Raumfachwerke bewiesenen Satz erbracht, daß bei projektiven Transformationen die Eigenschaft eines Fachwerkes, Ausnahmefachwerk zu sein, erhalten bleibt. Es mag vielleicht nicht überflüssig erscheinen, zu zeigen, daß dieser Satz für ebene Fachwerke bei Heranziehung der Theorie der Maxwellschen Polyeder und der Airyschen Spannungsfunktion unmittelbar einleuchtend ist. Da in der Theorie der Maxwellschen Polyeder zwei verschiedene Auffassungen möglich sind und da diese auch sonst oft nützliche Theorie nicht allgemein bekannt ist, so sei sie für das folgende kurz auseinandergesetzt.

Um in einer elastischen Scheibe, welche nur von Kräften beansprucht wird, die in der Ebene dieser Scheibe wirken und am Rande der Scheibe angreifen, die Spannungsverhältnisse geometrisch zur Darstellung zu bringen, denke man sich in einem räumlichen rechtwinkligen Koordinatensystem, dessen $xy$-Ebene mit der Scheibenebene zusammenfalle, die zur Airyschen Spannungsfunktion

$$z = \int (x\,Y - y\,X)\,ds - \left[x \int Y\,ds - y \int X\,ds\right]$$

[1]) Diese Zeitschr. Bd. 6 (1926), S. 48 bis 58.

zugehörige Fläche konstruiert. Es sind dabei die Größen

$$X\,ds = X_x\,dy - X_y\,dx\,,$$
$$Y\,ds = Y_x\,dy - Y_y\,dx$$

die mit $ds$ multiplizierten, von der rechten auf die linke Seite des orientierten Linienelementes wirkend gedachten Spannungskomponenten. Die Spannungskomponente normal zum Linienelement ist gegeben durch $\frac{d^2 z}{d s^2}$, und zwar bedeutet $\frac{d^2 z}{d s^2} > 0$ Zug, $\frac{d^2 z}{d s^2} < 0$ Druck. Eine Schubspannung ist gegeben durch $\frac{d^2 z}{ds\,dn}$. Die in der Formel für $z$ angeschriebenen Linienintegrale sind wegen der Grundgesetze der Statik vom Wege unabhängig und können jedes für sich von einem beliebigen Anfangspunkt aus erstreckt werden (natürlich wählt man meist denselben Punkt für alle Integrale).

In entsprechender Weise kann man die Theorie der Maxwellschen Polyeder entwickeln. Zunächst denke man sich etwa auftretende äußere Kräfte durch elastische Zug- oder Druckstäbe ersetzt. Ferner zeichne man von einem beliebigen Ausgangspunkte $x_0$, $y_0$ zu einem beliebigen Punkt $x, y$ einen sonst beliebigen Weg, der aber durch keinen Knotenpunkt hindurchgehen soll. Die Schnittstellen dieses Weges mit den einzelnen Stäben seien der Reihe nach mit $x_i$, $y_i$ ($i = 1, 2, \ldots$) bezeichnet. Schließlich sollen $X_i$, $Y_i$ die Komponenten der Stabkräfte bedeuten, die man sich von der rechten Seite des Weges auf die linke Seite wirkend denken möge.

Nun konstruieren wir wieder die Fläche

$$z = \sum_{i=1}^{\sigma} (x_i Y_i - y_i X_i) - [x \sum_{i=1}^{\sigma} Y_i - y \sum_{i=1}^{\sigma} X_i],$$

wobei das $\sigma$ beim Summenzeichen die Summation längs des gewählten Weges anzeigen soll. Diese aus lauter ebenen Stücken bestehende Fläche ist wegen der Grundgesetze der Statik unabhängig von der Wahl des Weges, der von $x_0, y_0$ zu $x, y$ führt, und entspricht einer eindeutigen, stetigen Funktion[1]). Durchschneidet der Weg einen Zugstab (Druckstab), so erfährt der Differentialquotient $\frac{dz}{ds}$ eine Zunahme (Abnahme). Durchsetzt der Weg den Stab im besonderen senkrecht, so gibt die Zunahme (Abnahme) dieses Differentialquotienten unmittelbar die Größe des Zuges (Druckes) an.

Als Ausgangspunkt der Wege wählt man gewöhnlich einen Punkt im Aeußeren des Fachwerkes. Erwähnt sei, daß man zu der obigen Fläche noch eine beliebige lineare Funktion additiv hinzufügen kann.

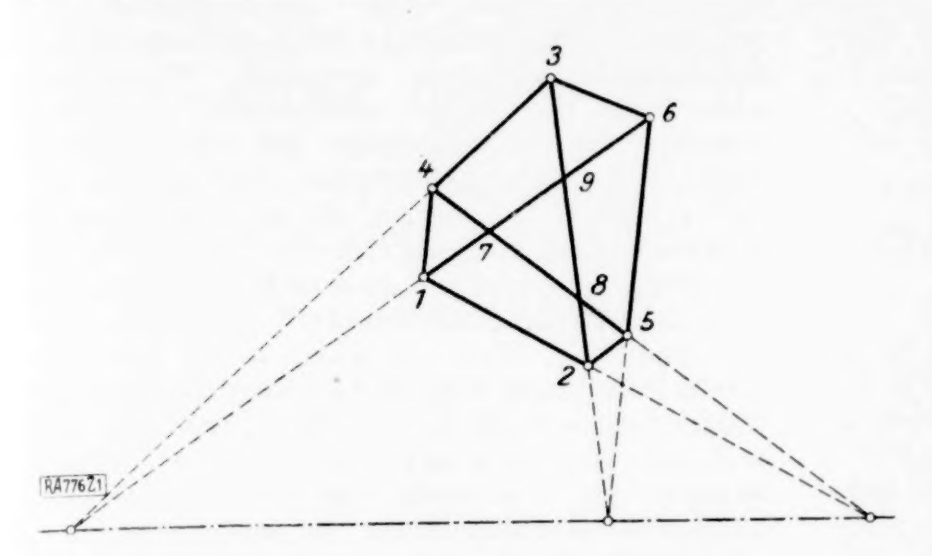
Ist nun ein Fachwerk ein Ausnahmewerk, d. h. sollen trotz der Relation: Anzahl der Stäbe = doppelte Anzahl der Ecken — 3 ohne Einwirkung äußerer Kräfte im Innern des Fachwerkes Selbstspannungen auftreten, so muß der Fachwerksfigur als Grundriß ein nicht mit der Grundrißebene vollkommen zusammenfallendes, zugehöriges Maxwellsches Polyeder entsprechen der Art, daß die dem Außenrand der Fachwerksfigur entsprechenden Kanten dieses Polyeders mit der Grundrißebene zusammenfallen. Der in der Einleitung angekündigte Satz, daß bei beliebigen projektiven Transformationen der Fachwerksebene die Eigenschaft eines Fachwerkes, Ausnahmefachwerk zu sein, erhalten bleibt, ist nun unmittelbar einleuchtend. Wendet man nämlich eine derartige räumliche Kollineation an, bei der erstens die Grundrißebene in sich übergeführt wird und zweitens der unendlich ferne Punkt der Normale zur Grundrißebene sich selbst entspricht, so ist klar, daß ein nicht mit der Grundrißebene zusammenfallendes Maxwellsches Polyeder wieder in ein solches übergeht. Dabei sei hervorgehoben, daß aus der Betrachtung der räumlichen Kollineationen dieser Art für die Kollineationen in der Grundrißebene keinerlei Besonderheiten folgen.

Einer Ergänzung bedürftig ist diese Betrachtung nur noch im Fall, daß sich mehr als zwei Stäbe in einem Punkt überschneiden. Man hat dann noch folgendes zu beachten. Wenn sich zwei Stäbe überschneiden, so ergibt sich wegen der Konstanz der Stabkraft zu beiden Seiten der Ueberschneidungsstelle, daß der Ordinatenunterschied für die beiden Ebenenpaare, die zu beiden Seiten der Schnittstelle dem Stab entsprechen, bei Verlängerung bis zu einem beliebigen Punkt $x, y$ derselbe ist. Diese Eigenschaft bleibt aber offenbar bei Kollineationen der betrachteten Art erhalten; denn bei diesen Kollineationen werden Punktreihen auf Normalen zur Grundrißebene in ähnliche verwandelt.

Es sei auch darauf hingewiesen, daß die Theorie der Maxwellschen Polyeder sehr bequem und anschaulich den oft als Beispiel angeführten Satz erkennen läßt, daß ein Sechseck mit drei eingezogenen Diagonalen dann und nur dann ein Ausnahmefachwerk ist, wenn es ein Pascalsches ist.

Bei einem Ausnahmefachwerk muß nämlich zu der beistehenden Figur als Grundriß ein solches nicht mit der Grundrißebene zusammenfallendes Maxwellsches Polyeder möglich

[1]) Die hier vertretene Auffassung entspricht der Einführung idealer Gelenke in der Theorie der Kraftpläne (vergl. etwa F. Schur, Vorlesungen über graphische Statik, oder Henneberg, Graphische Statik der starren Systeme). Die den einzelnen Feldern entsprechenden Werte $\Sigma\sigma\, X_i$ bzw. $\Sigma\sigma\, Y_i$ sind dabei die $x$- bzw. $y$-Koordinate der zugehörigen Ecken des Kraftplanes. Ueber den Zusammenhang der Kraftpläne und der Maxwellschen Polyeder und die Erweiterung dieser Theorie für biegungssteife Tragkonstruktionen vergl. etwa mein Buch über »Lineare Differenzengleichungen und ihre Anwendungen in der Baumechanik« sowie die dort zitierte Literatur. Auch bei Maxwell findet sich schon diese Auffassung; siehe z. B. seinen Enzyklopädie-Artikel: Diagrames (Scientific Papers Bd. 2, S. 647). Eine andere Auffassung findet sich gelegentlich bei Felix Klein, der mehrdeutige Spannungsfunktionen verwendet; vergl. seine Abhandlung: Ueber Selbstspannungen ebener Diagramme (Math. Ann. Bd. 67).




sein, so daß dessen Außenkanten mit den Seiten des Sechseckes 1, 2, 5, 6, 3, 4, im Grundriß zusammenfallen. Soll das möglich sein, so müssen die den Ziffern 1, 2, 8, 7 bzw. 3, 4, 7, 9 bzw. 5, 6, 9, 8 entsprechenden Vierecke unseres Polyeders ebene, aber nicht in die Grundrißebene fallende Vierecke sein[1]). Auf der Schnittlinie der Polyederebene, die durch die den Ziffern 7, 8, 9 entsprechenden Punkte hindurchgeht, mit der Grundrißebene schneiden sich auch je zwei Gegenseiten der oben angegebenen Vierecke, nämlich die den Ziffern 1, 2 und 7, 8 bzw. 5, 6 und 8, 9 bzw. 3, 4 und 7, 9 entsprechenden Geraden, also müssen sich auch die Bilder der Geraden 7, 8 bzw. 8, 9 bzw. 9, 7 im Grundriß mit den Geraden 1, 2 bzw. 5, 6 bzw. 3, 4 auf der Schnittlinie der Ebene 7, 8, 9 mit der Grundrißebene schneiden und somit erweist sich diese Schnittlinie als Pascalsche Gerade unseres Sechsecks. P. Funk. 775

**Die Verwendung von Potenzmitteln zur numerischen Lösung von Gleichungen.** Im Folgenden wollen wir zur numerischen Lösung von Gleichungen — vornehmlich von algebraischen — die in der Politischen Arithmetik häufig verwendete einfachste Methode: das linear interpolierende Iterationsverfahren praktisch weiterbilden. Handelt es von der Rentabilität oder der wirklichen Verzinsung langfristiger Rentenoperationen, so treten beim Gebrauch der üblichen Rententabellen zwei Fälle auf: a) Die Aufgabe kann auf eine dreigliedrige algebraische Gleichung höheren Grades zurückgeführt werden[2]); hierbei kann eine direkte Tabelleninterpolation erfolgen. b) Man erhält eine mehr als dreigliedrige algebraische Gleichung höheren Grades; hier ist die für die Lösung von Gleichungen gebräuchliche iterative lineare Interpolation das einfachste Verfahren[1]). Im zweiten Fall wird die Arbeit mit den fertigen Potenztabellen der Politischen Arithmetik besonders vereinfacht, indem man beim Rentenzinsfußproblem eine positive Wurzel zwischen eins und zwei suchend, bei den Berechnungen der sukzessiven Rahmenwerte der auftretenden Funktion statt des in den meisten praktischen Fällen recht weitläufigen Hornerschen Schemas, diese fertigen Tabellen verwerten kann. Es sei kurz darauf hingewiesen, daß diese Potenztabellen auch außerhalb des Kreises der Politischen Arithmetik bei der numerischen Lösung von algebraischen Gleichungen höheren Grades — mit geschickter Wurzeltransformation — für denselben Zweck nutzbar gemacht werden können; hierzu sind besonders solche Tabellen brauchbar, die bis zum Argumentwert 200 laufen (z. B. die Tabelle für $2^1/_2$ vH bei Murai und die Gloverschen Tabellen, welche auch die Logarithmen geben).

Die lineare Interpolation mit wenigen iterierten Schritten ist wohl die rascheste Methode, sie kann jedoch vom Gesichtspunkt des Praktikers nur dann als eine solche gelten, wenn das Interpolationsintervall mit nur einer einfachen Wurzel bereits genügend klein ist[2]). Es ist aber gewöhnlich ein mühevolles Vorgehen, ein solches Intervall gleich zu Beginn abzugrenzen und eben die Verbesserung dieses Umstandes — also der ersten Schritte — soll uns im Folgenden beschäftigen.

Da die »Methode der falschen Lage« *(regula falsi)* ein solches spezielles, linear interpolierendes Lösungsverfahren ist, so handelt es also eigentlich von der praktischen Weiterbildung dieses einfachen Rechenschemas. Wir verfolgen dabei nicht den Weg mit Berücksichtigung höherer Differenzen[3]), sondern verwenden das bekannte Lagengesetz der Potenzmittel, deren spezieller Fall die lineare Interpolationsformel ist. Diese Fortbildung ist im Falle fertiger Tabellen der rechnerischen Ausgestaltung besonders zugänglich.

Es seien zwei Rahmenwerte der zur linken Seite der Gleichung zugehörigen Funktion gegeben: $f(x_1) = y_1$ und $f(x_2) = y_2$.

---

[1]) Vergl. hiermit Dandelins Beweis des Pascalschen Satzes, Annales de Gergonne, Bd. 15, bzw. etwa die Darstellung und kritische Besprechung dieses Beweises bei Pasch und Dehn, Vorlesungen über neuere Geometrie (Springer 1926), S. 230.

[2]) Siehe hierüber die Arbeit des Verfassers in der Zeitschrift für Mathematik und Physik Bd. 59 (1911).

[1]) Für kompliziertere Fälle, in denen die sonst noch bekannten andern Methoden versagen würden, siehe mehrere aktuelle Berechnungen von A. Barriol in den letzten Jahrgängen des Journal des Économistes. [Eine andersartige Methode für den fünfgliedrigen Fall siehe in der Arbeit des Verfassers in dieser Zeitschr. Bd. 1 (1921).]

[2]) Ueber die Fehlerabschätzung siehe z. B. Lüroth: Vorlesungen über numerisches Rechnen, S. 176. In Anwendung auf das Rentenzinsfußproblem siehe Boggios Aufsatz in den Memorie della Reale Accademia delle Scienze di Torino Bd. 60 (1908).

[3]) Siehe hierüber Weber: Lehrbuch der Algebra I. § 116; für die Politische Arithmetik findet man diesen Weg für den Fall a) in den meisten Lehrbüchern praktisch durchgeführt.

Dann ist die lineare Interpolation für ein $x_1 < x_0 < x_2$ durch die Beziehung bestimmt:

$$f(x_2) - f(x_0) : f(x_0) - f(x_1) = x_2 - x_0 : x_0 - x_1$$

und hieraus bei gegebenem $f(x_0)$:

$$x_0 = \frac{[f(x_2) - f(x_0)]\, x_1 + [f(x_0) - f(x_1)]\, x_2}{f(x_2) - f(x_1)} = P_1.$$

Dieser interpolierte Argumentwert kann nun als ein mit den Gewichten $f(x_2) - f(x_0)$ bzw. $f(x_0) - f(x_1)$ gewogener arithmetischer Mittelwert der Rahmenargumente gedeutet werden. Indem wir dann den arithmetischen Mittelwert als ein spezielles Potenzmittel betrachten, kann auch $x_0$ allgemeiner als $k$-tes gewogenes Potenzmittel[1]) der Rahmenargumente angeschrieben werden:

$$x_0 = \sqrt[k]{\frac{[f(x_2) - f(x_0)]\, x_1{}^k + [f(x_0) - f(x_1)]\, x_2{}^k}{f(x_2) - f(x_1)}} = P_k.$$

Diesen Ansatz kann man bei der direkten Tabelleninterpolation (Fall a) oben) verwenden, besonders, wenn die Rahmenargumente nicht genügend dicht aneinander liegen. Bei der »regula falsi« — also bei der Lösung der Gleichung (Fall b) oben) — ist nun für einen Kurvenzug ohne Inflexionspunkt:

$$f(x_0) = 0 \quad \text{und} \quad \operatorname{sg} f(x_1) \neq \operatorname{sg} f(x_2),$$

also

$$x_0 = \frac{f(x_2)\, x_1 - f(x_1)\, x_2}{f(x_2) - f(x_1)},$$

und man erhält weiterbildend als angenäherten Wurzelwert $k$-ter Ordnung:

$$x_0 = \sqrt[k]{\frac{f(x_2)\, x_1{}^k - f(x_1)\, x_2{}^k}{f(x_2) - f(x_1)}}.$$

Die gewogenen Potenzmittel[2])

$$P_k = \left( \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} g_i\, a_i{}^k}{\sum\limits_{i=1}^{n} g_i} \right)^{\frac{1}{k}}$$

befolgen im Falle positiver Argumente und positiver Gewichte das folgende Lagengesetz:

$$\text{für } |k| \geqq 1 \text{ und } |k| \leqq 0 : P_k \geqq P_{k-1},$$
$$\text{für } 0 < |k| < 1 : P_k \leqq P_{k-1}.$$

(Das Gleichheitszeichen tritt bei untereinander gleichen Argumenten auf.)

Bei der Tabelleninterpolation und bei der regula falsi ist $n = 2$; wir wählen ein ganzzahliges $k$ und zwar für einen konvexen Kurvenzug ein $k > 0$, für einen konkaven Kurvenzug ein $k < 0$. Ist nun $|k| > 1$, so liegt das so interpolierte $x_0$ dem gesuchten Wurzelwert näher, als der linear interpolierte, d. h. der Schritt zur Annäherung ist ein intensiverer. Die Gewichte hierbei sind positiv, da $sg f(x_1) \neq sg f(x_2)$, ferner ist mit einer Wurzeltransformation stets zu erreichen, daß $x_1, x_2 > 0$ ausfallen. Es ist am zweckmäßigsten vorerst eine solche Wurzelumformung vorzunehmen, die den gesuchten Wert zwischen solche Rahmenwerte bringt, für welche die Potenztabellen der Politischen Arithmetik verwendbar und die auftretende logarithmische Arbeit leicht durchführbar ist. Die Wahl von $k$ hängt von den speziellen Vorkommnissen ab, wobei das ohnehin notwendige, voranzugehende graphische Studium des gegebenen Falles zu verwerten ist; wenn möglich, so wähle man für $k$ die Gradzahl der Gleichung. Für die praktische Durchführung ist noch folgendes wesentlich: Die »regula falsi« kann — entgegen der Newtonschen Methode — auch dann angewendet werden, wenn auf dem Kurvenzug ein Extremalpunkt liegt; die ursprüngliche lineare Regel ist jedoch nicht zweckmäßig, wenn einer der Rahmenwerte zufällig in die Nähe dieses Extremums fällt. Mit entsprechender Wahl von $k$ (z. B. gleich der Gradzahl, so daß die Interpolationskurve die charakteristischen Krümmungstendenzen des Kurvenzuges mitmacht) ist dieser Umstand für die höhere »regula falsi« nicht störend.

Mit der iterativen Anwendung dieser Potenzmitteloperation (und zwar für einfache Rahmenargumente oder für solche, die in der Potenztabelle vorzufinden sind) kann von beiden Seiten in einigen Schritten ein solches Intervall abgegrenzt werden, in dem dann schließlich eine oder — wenn nötig — mehrere genaue lineare Interpolationen mit Erfolg ausgeführt werden können.

Das angeführte Lagengesetz der Potenzmittel ist eine direkt verifizierbare Folge ihrer funktionalen Beziehung zu $k$; es folgt auch als Spezialfall aus der bekannten Jensenschen Ungleichung[1]). Für den ungewogenen Fall existieren mehrere elementare Ableitungen. Wir wollen im Folgenden diesen verschiedenen Beweismethoden eine solche anreihen, welche die Rolle der Gewichte prägnant hervortreten läßt und auch bei eventuellen Abweichungen von den gemachten Voraussetzungen über Argumente und Gewichte allgemeinen Aufschluß gibt; diese kann ferner auch bei der Untersuchung von Ungleichungen anderer Beschaffenheit nachgebildet werden. Wir skizzieren das Verfahren für den Fall der »regula falsi«, also für $n = 2$ und stellen allgemein $P_k$ und $P_{k-h}$ einander gegenüber (statt wie üblich $P_k$ und $P_1$); wir set-

---

[1]) Ueber die statistischen Anwendungen dieser Mittel siehe Gumbels Aufsatz im Deutschen statistischen Centralblatt Bd. 9 (1917) und die ausführliche Arbeit des Verfassers im Skandinavisk Aktuarietidskrift 1920; weiterhin siehe Blaschkes Darstellung in der Sammlung Wirtschaft und Recht der Versicherung 1925, Heft 1.

[2]) $P_1$ arithmetischer, $P_{-1}$ harmonischer Mittelwert; mit Anwendung der l'Hôpitalschen Regel auf den Logarithmus erfolgt, daß der Grenzwert für $k = 0$ der geometrische Mittelwert ist.

[1]) Siehe die Arbeit von Jensen in Acta Mathematica Bd. 30 (1906), weiterhin das Kapitel über Ungleichungen im I. Bd. der Pólya-Szegőschen Aufgabensammlung. Ueber den Zusammenhang mit noch allgemeineren Ansätzen siehe das III. Kapitel von Fr. Riesz: Les systèmes d'équations linéaires à une infinité d'inconnues.

zen vorerst nichts über die vorkommenden Werte voraus[1]). Die Aufgabe lautet:

$$g_1 x^k + g_2 y^k = \text{Extremum}$$

mit der Nebenbedingung:

$$g_1 x^{k-h} + g_2 y^{k-h} = \text{constans}.$$

Zu betrachten ist also:

$$f(x) = g_1 x^k + g_2 \left(\frac{c - g_1 x^{k-h}}{g_2}\right)^{\frac{k}{k-h}}.$$

Aus $f'(x_0) = 0$ folgt mit leichter Rechnung, daß

$$x_0 = y_0 = \sqrt[k-h]{\frac{c}{g_1 + g_2}}$$

und man erhält nach ausgeführter Rechnung:

$$f''(x_0) = k\,h \frac{g_1}{g_2} \sqrt[k-h]{\frac{c^{k-2}}{(g_1 + g_2)^{h-2}}}.$$

Aus dieser letzten Beziehung können nun die notwendigen Voraussetzungen über Argumente und Gewichte für ein Maximum bzw. Minimum abgeleitet werden. Für den Fall der »regula falsi« mit ganzzahligem $k$ und $h$ und $|k| > |h|$ folgt zum Beispiel, daß bei $h > 0$ für $k > 0$ ein reelles Minimum, für $k < 0$ ein reelles Maximum auftritt; also für $k > 0$:

$$g_1 x^k + g_2 y^k \geqq (g_1 + g_2) \left(\frac{c}{g_1 + g_2}\right)^{\frac{k}{k-h}}$$

$$= (g_1 + g_2) \left(\frac{g_1 x^{k-h} + g_2 y^{k-h}}{g_1 + g_2}\right)^{\frac{k}{k-h}},$$

wodurch

$$\left(\frac{g_1 x^k + g_2 y^k}{g_1 + g_2}\right)^{\frac{1}{k}} \geqq \left(\frac{g_1 x^{k-h} + g_2 y^{k-h}}{g_1 + g_2}\right)^{\frac{1}{k-h}}$$

und für $k < 0$ umgekehrt.

Schlußbemerkung: Die »regula falsi« kann auch zu einer linearen Extrapolation ausgebildet werden, im Falle der verwendete Kurvenzug entsprechend gekrümmt ist[1]). Die Weiterbildung dieses Prozesses geschieht zweckmäßiger, wenn man statt der Potenzmittel die sogenannten gewogenen Potenzmittelwerte einführt. Diese letzteren sind nämlich — wie Gumbel a. a. O. bemerkt hat — für Extrapolationszwecke geeigneter, indem die nicht linearen Kurven im Endlichen bleiben. Die Definition dieser Potenzmittelwerte, die ein analoges Lagengesetz, wie die Potenzmittel, besitzen[2]), ist die folgende[3]):

$$\Pi_k = \frac{\sum_{i=1}^{n} g_i a_i^{k+1}}{\sum_{i=1}^{n} g_i a_i^{k}}.$$

Wir erhalten für den Fall der »regula falsi«

$$X_0 = \frac{f(x_2)\, x_1^{k+1} - f(x_1)\, x_2^{k+1}}{f(x_2)\, x_1^{k} - f(x_1)\, x_2^{k}}.$$

Diese Formel kann mit Anwendung der angeführten Potenztabellen zur Rechenarbeit brauchbar gemacht werden.

Budapest, den 29. Dezember 1926.

Karl Goldziher. 754

[1]) Die Verallgemeinerung für $n > 2$ führt zu relativen Extremalaufgaben mit mehr als zwei Veränderlichen. — Ein besonderer Fall wäre: $x^{g_1} y^{g_2} = \text{Extr.}$ mit $g_1 x + g_2 y = \text{const.}$; dies führt zu $P_0 < P_1$. — Für die einfachsten Fälle sind geometrische Deutungen leicht anzugeben.

[1]) Siehe Whittaker-Robinson: The calculus of observations, S. 93.

[2]) Beide Lagengesetze können nämlich aus einer und derselben Spezialform der Cauchy-Hölderschen Ungleichung gefolgert werden.

[3]) $\Pi_0$ arithmetischer, $\Pi_{-1}$ harmonischer, $\Pi_{+1}$ antiharmonischer Mittelwert.

# BUCHBESPRECHUNGEN

(Die hier angezeigten Bücher sind durch die VDI-Buchhandlung, Berlin NW 7, Ingenieurhaus, zu beziehen.)

**Dr.-Ing. WALTHER KAUFMANN,** o. Prof. an der Technischen Hochschule in Hannover. Vorträge über die Mechanik als Grundlage für das Maschinenwesen. Erster Teil: Einführung in die Mechanik starrer Körper. Achte Auflage des gleichnamigen Lehrbuches von Keck-Hotopp. Mit 520 Abbildungen. Helwingsche Verlagsbuchhandlung Hannover 1927. XI + 632 S. Preis geh. 29,50 M, geb. 31,50 M.

Wer das Lehrbuch von Keck, das zum ersten Mal vor mehr als 30 Jahren erschienen ist (und später von Hotopp herausgegeben wurde), kennt, würde es kaum für zeitgemäß halten, daß eine Neubearbeitung dieses in mehr als einer Hinsicht veralteten Werkes herauskommt. Allein die nähere Durchsicht zeigt, daß es Herrn Kaufmann wirklich gelungen ist, allerdings unter sehr geringer Schonung des bisher vorhandenen Textes, ein durchaus brauchbares und ansprechendes Lehrbuch zu schaffen. Gegenüber den meisten neueren Büchern zeichnet es sich durch eine breitere Darstellung, eine gewisse gemächliche Art des Fortschreitens aus. Der 600 Seiten umfassende Band behandelt die Statik des starren Körpers, die Dynamik des Massenpunkts und von der Bewegung des starren Körpers im wesentlichen nur die ebene. Am Schluß dringt man eben noch bis zu den Eulerschen Gleichungen für die Drehung des starren Körpers vor. Den Bedürfnissen des Studierenden einer Technischen Hochschule ist auch durch die Auswahl der Beispiele und durch manche konkrete Angabe über Zahlenwerte usw. Rechnung getragen. In letzterer Hinsicht wäre vielleicht noch etwas mehr Modernisierung möglich gewesen.

Mises. 800

Dr.-Ing. ALFRED **MILLIES**, Räumliche Vieleckrahmen mit eingespannten Füßen unter besonderer Berücksichtigung der Windbelastung. Mit 53 Textabbildungen. Verlag von Julius Springer, Berlin 1927. VI + 96 S. Preis 12 M.

Die vorliegende Publikation behandelt den symmetrischen Achteckrahmen mit steif angeschlossenen eingespannten Stielen. Die Riegel und die Einspannstellen der Stiele liegen in parallelen Ebenen und bilden konzentrische Achtecke. Als statisch unbestimmtes Hauptsystem werden vier zweistielige Rahmen gewählt, deren Berechnung mit Hilfe der Arbeitsgleichung ausführlich dargelegt ist. Man kann beim zweistieligen Rahmen, ähnlich wie beim ebenen System, durch eine Verschiebung der Koordinatenachsen erreichen, daß sich die sechs Unbekannten je aus einer Gleichung berechnen lassen. Beim Achteckrahmen gelingt es, mit Anwendung der Belastungsumordnung, alle Unbekannten aus drei Gruppen von drei, drei und sechs Gleichungen zu erhalten. Da eine allgemeine Auflösung nicht möglich war, wurde die Untersuchung für die wichtigsten Belastungsfälle bei einer Reihe von Steifigkeitsverhältnissen zahlenmäßig durchgeführt. — Einem zweiten Verfahren zur Berechnung des symmetrischen n-stieligen Rahmens wurde ein statisch bestimmtes Hauptsystem zugrunde gelegt: n eingespannte Stiele, auf denen die Riegel frei gelagert sind. Man bekommt einfache Verschiebungswerte, jedoch ist die Auflösung der Elastizitätsgleichungen umständlicher.

Bei seitlich nicht versteiften Bogenträgern, bei der Tragkonstruktion von Wassertürmen oder derartigen Bauten, liefern Methoden, bei denen eine Zerlegung in ebene Systeme vorgenommen ist, besonders bei wagrechtem Kraftangriff keine brauchbaren Ergebnisse. Der Statiker, der vor eine solche Aufgabe gestellt ist, wird dem Verfasser für die Ausrechnung dieses Beispiels dankbar sein.

Breslau. J. Ratzersdorfer. 816

Baurat Dr.-Ing. F. **KANN**, Wismar. Durchlaufende Eisenbetonkonstruktionen in elastischer Verbindung mit den Zwischenstützen. (Plattenbalkendecken und Pilzdecken.) Mit 47 Textabbildungen. Verlag von Julius Springer, Berlin 1926. IV + 72 S. Preis 7,20 M.

Behandelt sind die Tragwerke: Der Balken über zwei und der Balken über drei Oeffnungen mit steif verbundenen Zwischenstützen. Diese sind über zwei Felder durchlaufend (ein Feld oberhalb und eins unterhalb des Balkens) und haben zwei gelenkige oder zwei vollkommen eingespannte Enden. Die Fälle der gelenkig gelagerten und eingespannten Stützen unterscheiden sich durch den »Einspannungsgrad«, d. i. durch eine Beziehung zwischen den Querschnittsträgheitsmomenten von Balken und Stützen. Der Einspannungsgrad Null bedeutet vollkommene Einspannung, Eins die Pendellagerung des Balkens. Die Tabellen der Einflußlinien sind den Griotschen für Schneidenlagerung nachgebildet. Sie sind für die Einspannungsgrade $1/3$, $1/2$ und $2/3$ für verschiedene Seitenverhältnisse der Balkenöffnungen berechnet.

Breslau. J. Ratzersdorfer. 817

NIELS ERIK **NÖRLUND**, ord. Professor der Mathematik an der Universität Kopenhagen. Vorlesungen über Differenzenrechnung. Mit 54 Textfiguren. Die Grundlagen der mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen mit besonderer Berücksichtigung der Anwendungsgebiete. Band XIII. Verlag von Julius Springer, Berlin 1924. IX + 551 S. Preis 24 M, geb. 25,20 M.

Auf die zunehmende Bedeutung der Theorie der Differenzengleichungen in der angewandten Mathematik ist in dieser Zeitschrift mehrmals hingewiesen worden. Seit dem im Ausschuß für technische Mechanik des Berliner Bezirksvereins deutscher Ingenieure am 26. Januar 1920 gehaltenen Vortrage von G. Wallenberg[1]), dem man ein gemeinsam mit dem Norweger A. Guldberg verfaßtes Lehrbuch[2]) über diese Theorie verdankt, ist sie durch manche neue Ergebnisse bereichert worden. In dem zitierten Vortrage sind nicht nur die wichtigsten Anwendungen erwähnt und an Beispielen illustriert, sondern ist auch die ältere Literatur zusammengestellt. Mit Rücksicht auf die schnelle Entwicklung der Theorie in den letzten Jahren und die Bedeutung der Sache scheint es angebracht zu sein, auf die neue Darstellung des dänischen Mathematikers N. E. Nörlund etwas ausführlicher einzugehen.

Nörlund selbst ist ein Fachmann, der die Theorie der Differenzengleichungen in zahlreichen wichtigen Punkten gefördert hat. Bei der Auswahl und Bearbeitung des Stoffes in der vorliegenden Darstellung sind natürlich in erster Linie rein mathematische Gesichtspunkte befolgt worden. Trotzdem versäumt der Verfasser nicht, dem Programm der von R. Courant herausgegebenen Lehrbuchserie entsprechend, die Beziehungen zu den benachbarten Wissenschaften hervorzuheben. Dies ist recht naturgemäß bei diesem Gegenstand, dessen Ursprünge in praktischen Aufgaben wurzeln. Man denke etwa, um nur ein einziges Beispiel zu nennen, an die verschiedenen Interpolationsformeln, welche in diesem Buche (Kap. 8) besonders ausführlich zu ihrem Rechte kommen. Diese sind bei der Berechnung von Zahlentafeln, ferner in Zusammenhang mit der mechanischen Quadratur (z. B. in der Astronomie) lange vor der systematischen Behandlung benutzt worden, freilich in vielen Fällen

[1]) S. diese Zeitschr. Bd. 1 (1921), S. 138 bis 143. Vergl. auch den Bericht über P. Funk, Die linearen Differenzengleichungen und ihre Anwendung in der Theorie der Baukonstruktionen, Berlin: J. Springer 1920, 84 S. (diese Zeitschr. Bd. 1 (1921), S. 147/148).

[2]) Berlin und Leipzig: B. G. Teubner 1911.

ohne genaue Abschätzung des Restgliedes. Die Untersuchung der Konvergenz dieser Formeln bildet einen der interessantesten Punkte der Theorie.

Nun aber Näheres über die Einteilung des Buches. Die Theorie der Differenzengleichungen beschäftigt sich, allgemein gesprochen, mit der Ermittlung einer Funktion $f(x)$, die einer Relation von der Form

$$\Phi[x,\ f(x),\ f(x+\omega),\ f(x+2\omega),\ldots\ f(x+n\omega)] = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

genügt, wo $\omega$ eine von 0 verschiedene Konstante, $\Phi$ eine gegebene Funktion. Dies ist eine Differenzengleichung $n$ter Ordnung. Sie heißt linear, wenn sie in $f(x)$, $f(x+\omega)$, ..... linear ist. Eine umgeformte gleichwertige Gestalt erhält man durch Einführung der Symbole

$$\underset{\omega}{\triangle} f(x) = \frac{f(x+\omega)-f(x)}{\omega}, \quad \overset{2}{\underset{\omega}{\triangle}} f(x) = \underset{\omega}{\triangle}\underset{\omega}{\triangle} f(x), \ldots$$

(die sogen. 1., 2., ... Differenzen von $f(x)$). Diese lautet:

$$\Psi[x,\ f(x),\ \underset{\omega}{\triangle} f(x),\ \overset{2}{\underset{\omega}{\triangle}} f(x), \ldots, \overset{n}{\underset{\omega}{\triangle}} f(x)] = 0,$$

die eine gewisse Analogie zu einer Differentialgleichung $n$ter Ordnung aufweist, in die sie übrigens unter gewissen Voraussetzungen für $\omega \longrightarrow 0$ übergeht. Eine lineare Differenzengleichung geht hierbei in eine lineare Differentialgleichung über. Die ganze Theorie, insbesondere aber die der linearen Differenzengleichungen, zeigt eine deutliche Analogie zu der der Differentialgleichungen. Das war ein leitender Gesichtspunkt bei vielen Untersuchungen.

Das einfachste Beispiel einer Differenzengleichung ist

$$f(x+1) - f(x) = 0.$$

Dieser Gleichung genügt jede Funktion von der Periode 1. Eine solche kann selbstverständlich im Intervall $0 \leq x < 1$ beliebig vorgeschrieben werden, so daß also die Lösung unbestimmt ist. Man sucht nun gewisse spezielle Lösungen durch einfache und natürliche Forderungen auszuzeichnen. (In dem vorliegenden Beispiel sind z. B. besonders bemerkenswert die Lösungen $\cos 2\pi k x$, $\sin 2\pi l x$, $k$, $l$ ganz, aus denen man durch lineare Kombination weitere einfache Lösungen gewinnen kann.)

Die etwas allgemeinere Differenzengleichung

$$f(x+1) - f(x) = \varphi(x) \quad . \quad . \quad (2),$$

wo $\varphi(x)$ eine gegebene Funktion ist, spielte in der Geschichte der Theorie eine große Rolle. Sie ist gewissermaßen das Analogon der Differentialgleichung $y' = \varphi(x)$, ihre Lösung entspricht also dem Problem der Integration. Man nennt darum oft $f(x)$ die Summe von $\varphi(x)$, den Prozeß der Auffindung von $f(x)$ die Summation von $\varphi(x)$. Für $\varphi(x) = \nu x^{\nu-1}$ genügt das sogen. Bernoullische Polynom $\nu$ter Ordnung $B_\nu(x)$ dieser Gleichung, dessen Werte für $x = 0$ die sogen. Bernoullischen Zahlen $B_\nu(0) = B_\nu$ sind, welche in vielen Problemen der Analysis vorkommen. Sie können rekursiv definiert werden durch die Gleichungen

$$\sum_{l=0}^{\nu} \binom{\nu}{l} B_l = B_\nu, \quad (\nu = 2, 3, 4, \ldots;\ B_0 = 1, \quad B_1 = -\tfrac{1}{2}).$$

Es ist dann

$$B_\nu(x) = \sum_{l=0}^{\nu} \binom{\nu}{l} B_l x^{\nu-l}.$$

Mit Hilfe dieser Ausdrücke kann z. B. die Euler-Maclaurinsche Summenformel in der folgenden Form geschrieben werden:

$$\varphi(x+h\omega) = \frac{1}{\omega}\int_x^{x+\omega} \varphi(t)\,dt + \sum_{\nu=1}^{m} \frac{\omega^\nu}{\nu!} B_\nu(h) \underset{\omega}{\triangle} \varphi^{(\nu-1)}(x) + R_m,$$

wo das Restglied

$$R_m = -\omega^m \int_0^1 \frac{\overline{B}_m(h-t)}{m!} \varphi^{(m)}(x+\omega t)\,dt$$

ist. Hierbei wird $\varphi^{(m)}(x)$ auf der Strecke $x, x+\omega$ als existierend und stetig angenommen; $\overline{B}_\nu(x)$ ist eine periodische Funktion mit der Periode 1, die in 0,1 mit $B_\nu(x)$ übereinstimmt. (Es ist $B_\nu(0) = B_\nu(1)$, $\nu > 1$.) Diese Polynome und die verwandten Eulerschen werden im 2. Kapitel behandelt, nachdem im 1. grundlegende Definitionen (Differenzen, Interpolationsformeln) vorangeschickt worden sind.

Die Kapitel 3 und 4 beschäftigen sich mit der Lösung von Gl. (2) bei gegebenem $\varphi(x)$, ferner mit dem Verhalten von gewissen ausgezeichneten Lösungen im komplexen Gebiet, Fragestellungen, welche für die Anwendungen kein unmittelbares Interesse bieten dürften. Das gleiche gilt für die allgemeinere Gleichung

$$\underset{\omega_1}{\triangle}\underset{\omega_2}{\triangle}\ldots\underset{\omega_n}{\triangle} f(x) = \varphi(x),$$

die im 7. Kapitel mit großer Ausführlichkeit behandelt wird[1]). Eine glückliche Verallgemeinerung der Bernoullischen Polynome und Zahlen (Kap. 6), die hauptsächlich vom Verfasser stammt, führt hier zu recht abgeschlossenen Resultaten. Noch vorher wird in einem besonderen Kapitel (Kap. 5) die Theorie der Gammafunktion auf Grund der Differenzengleichung

$$f(x+1) - x f(x) = 0,$$

der sie bekanntlich genügt, entwickelt.

Besonders interessant sind die im 8. Kapitel behandelten Interpolationsreihen:

1. Die Newtonsche Formel:

$$F(x) = \sum_{\nu=0}^{n} \overset{\nu}{\triangle} F(1) \binom{x-1}{\nu} + R_n;$$

[1]) **Eine Ausnahme bildet in dem vorbereitenden 6. Kap. eine Verallgemeinerung der Euler-Maclaurinschen Summenformel.**

2. die Gaußschen Formeln:

$$F(x) = \sum_{\nu=0}^{n} \overset{2\nu}{\triangle} F(-\nu) \binom{x+\nu}{2\nu} + \sum_{\nu=0}^{n-1} \overset{2\nu+1}{\triangle} F(-\nu-1) \binom{x+\nu}{2\nu+1} + R_n,$$

$$F(x) = \sum_{\nu=0}^{n} \overset{2\nu}{\triangle} F(-\nu) \binom{x+\nu-1}{2\nu} + \sum_{\nu=0}^{n-1} \overset{2\nu+1}{\triangle} F(-\nu) \binom{x+\nu}{2\nu+1} + R_n;$$

3. die Stirlingsche Formel:

$$F(x) = \sum_{\nu=0}^{n} \frac{\overset{2\nu}{\triangle} F(-\nu)}{(2\nu)!} x^2 (x^2 - 1^2) \ldots [x^2 - (\nu-1)^2] + \sum_{\nu=0}^{n-1} \nabla \frac{\overset{2\nu+1}{\triangle} F(-\nu-1)}{(2\nu+1)!} x(x^2 - 1^2) \ldots (x^2 - \nu^2) + R_n,$$

die aus den Gaußschen durch Addition entsteht, ferner

4. die Besselsche Formel:

$$F(x) = \sum_{\nu=0}^{n} \nabla \frac{\overset{2\nu}{\triangle} F(-\nu - {}^1\!/_2)}{(2\nu)!} \left[x^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2\right] \left[x^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2\right] \ldots \left[x^2 - \left(\nu - \frac{1}{2}\right)^2\right] + x \sum_{\nu=0}^{n} \frac{\overset{2\nu+1}{\triangle} F(-\nu - {}^1\!/_2)}{(2\nu+1)!} \left[x^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2\right] \left[x^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2\right] \ldots \left[x^2 - \left(\nu - \frac{1}{2}\right)^2\right] + R_n,$$

welche aus den Gaußschen ebenfalls durch einfache Umformungen hervorgeht. Hierbei bedeutet $\overset{s}{\triangle} F(a)$ die $s$-te Differenz von $F(x)$ (vgl. oben) für $\omega = 1$ und $x = a$,

$$\nabla f(a) = {}^1\!/_2 [f(a+1) + f(a)],$$

$R_n$ den sogen. Rest, der offensichtlich identisch verschwindet, wenn $F(x)$ ein Polynom $n$-ten bezw. $2n$-ten Grades ist. Die Hauptfrage lautet nun:

Welche Funktionen lassen sich und in welchen Gebieten durch diese Interpolationsformeln darstellen, d. h. wann gilt $\lim_{n \to \infty} R_n = 0$?

Die Bedingungen gibt der Verfasser tatsächlich an: $F(x)$ muß im Falle der Newtonschen Reihe rechts von einer der imaginären Achse parallelen Geraden, in den anderen Fällen in der ganzen Ebene regulär sein und im Unendlichen gewissen Bedingungen genügen, die für das Anwachsen von $|F(x)|$ eine obere Schranke liefern. Es folgt dann die Konvergenz in einer leicht angebbaren Halbebene bezw. in der gesamten Ebene. Mit Hilfe dieser Bedingungen kann dann auch der Gültigkeitsbereich der Formeln angegeben werden, welche $F'(x)$ und $\int_x^{x+\omega} F(t)\,dt$ durch die höheren Differenzen ausdrücken, womit für die klassischen Methoden der numerischen Differentiation und Integration eine strenge Basis gewonnen ist. Auch für die Behandlung der Gleichung (2) sind diese Interpolationsformeln von Bedeutung.

Auf den Inhalt der weiteren Kapitel sei nur ganz kurz hingewiesen. Im 9. Kapitel werden die sogen. Fakultätenreihen

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{a_\nu}{x(x+1)\ldots(x+\nu)}$$

behandelt. Die Kapitel 10, 11 und 12 handeln von den linearen Differenzengleichungen, deren Definiton oben angegeben wurde. Hier sei bloß ein berühmter Satz von Poincaré genannt, der für die Anwendungen wichtig sein kann. Ist die vorgelegte Differenzengleichung linear und homogen, d. h. der Form

$$f(x+n) + \sum_{\nu=0}^{n-1} a_\nu(x) f(x+\nu) = 0,$$

wo die $a_\nu(x)$ gegebene Funktionen sind, so wird vielfach nach dem Verhalten der Lösung $f(x)$ für große positive Werte von $x$ gefragt. Im Falle konstanter $a_\nu(x) = a_\nu$ kann diese Frage sehr genau beantwortet werden. (Dieser Fall entspricht dem der linearen Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten.) Weniger einfach ist der von Poincaré behandelte allgemeinere Fall, wo nur die Grenzwerte

$$\lim_{x \to \infty} a_\nu(x) = a_\nu$$

vorhanden sind. Er bildet dann die Gleichung

$$t^n + a_{n-1} t^{n-1} + \ldots + a_1 t + a_0 = 0.$$

Wenn nun die Wurzeln derselben sämtlich verschiedene Beträge haben, so ist der Grenzwert

$$\lim_{x \to \infty} \frac{f(x+1)}{f(x)}$$

vorhanden und gleich einer jener Wurzeln. Die weitere Behandlung dieser Klasse von Differenzengleichungen verdankt man Perron, der sich auch mit dem schwierigen Fall von gleichen Wurzeln befaßt hat.

Das 13. Kapitel geht auf die Untersuchungen von Birkhoff über Systeme von Differenzengleichungen ein.

Das 14. Kapitel handelt allgemein von den inhomogenen linearen Differenzengleichungen. Man benutzt hierbei ein analoges Verfahren, das Lagrangesche der Variation der Konstanten bei den entsprechenden Differentialgleichungen. Ebenda wird, allerdings sehr knapp, auf Arbeiten von Hilb und Perron eingegangen. Das wesentliche der von diesen Autoren befolgten Methode ist die Zurückführung der Differenzengleichung auf eine Differentialgleichung unendlich hoher Ordnung, die dann mit Hilfe von linearen Gleichungen mit unendlich vielen Unbekannten behandelt wird. So führt z. B. die Differenzengleichung

$$\frac{f(x+1) + f(x)}{2} = \varphi(x)$$

auf die Differentialgleichung unendlich hoher Ordnung

$$f(x) + {}^1/_2 \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{f^{(\nu)}(x)}{\nu!} = \varphi(x).$$

Die große Bedeutung dieser Methode besteht darin, daß sie auf recht natürliche Weise zu gewissen ausgezeichneten, durch vorgegebene Wachstumsbedingungen charakterisierbaren Lösungen führt. Auch für die Behandlung allgemeinerer Funktionalgleichungen liefern diese Ideen ein bedeutendes Hilfsmittel.

Das letzte Kapitel ist der Beziehung zur Kettenbruchtheorie gewidmet. Die Theorie der Kettenbrüche läßt sich ja in die der linearen homogenen Differenzengleichungen 2. Ordnung einordnen. Vierzehn zum Teil neu durchgerechnete Tafeln und ein sehr ausführliches Literaturverzeichnis beschließen das Werk, wobei ein besonderes Verzeichnis der Anwendungen auf technische Aufgaben (etwa 60 Arbeiten) angegeben wird. Die Darstellung ist klar und verständlich.

Königsberg. G. Szegö. 648

ADOLF **HURWITZ,** Weil. ord. Prof. der Mathematik am Eidgenössischen Polytechnikum Zürich. Vorlesungen über allgemeine Funktionentheorie und elliptische Funktionen. Herausgegeben und ergänzt durch einen Abschnitt über Geometrische Funktionentheorie von R. Courant, ord. Prof. der Mathematik an der Universität Göttingen. Zweite, vollständige umgearbeitete und vermehrte Auflage. Mit 128 Textfiguren. Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen mit besonderer Berücksichtigung der Anwendungsgebiete. Band III. Verlag von Jul. Springer, Berlin 1925. XII + 496 S. Preis 23,40, geb. 25 M.

Die vorliegende, nach knapp drei Jahren notwendig gewordene Neuauflage der Hurwitz-Courantschen Funktionentheorie gliedert sich wie die erste Auflage in drei Hauptabschnitte, von denen die beiden ersten eine fast wörtliche Wiedergabe eines von Hurwitz hinterlassenen Manuskripts über Funktionentheorie und elliptische Funktionen enthalten, während der dritte Abschnitt über geometrische Funktionentheorie von dem Herausgeber Courant beigesteuert worden ist. Der Unterschied gegenüber der ersten Auflage ist in den beiden ersten Abschnitten ganz geringfügig und beschränkt sich, von kleinen Verbesserungen abgesehen, auf die Hinzufügung zweier Paragraphen, die der Gammafunktion gewidmet sind. Dagegen ist der dritte Abschnitt von Courant für die zweite Auflage völlig umgearbeitet und bedeutend erweitert worden.

Im ersten Abschnitt wird die allgemeine Theorie der Funktionen einer komplexen Veränderlichen, und zwar im wesentlichen vom Weierstraßschen, d. h. potenzreihentheoretischen Standpunkt aus, behandelt. Der zweite Abschnitt bringt eine ausgezeichnete Einführung in die Theorie der elliptischen Funktionen; den Ausgangspunkt dieser Einführung bildet die Weierstraßsche $\wp$-Funktion, doch wird der Leser auch mit den Jacobischen elliptischen Funktionen bekannt gemacht. Die Darstellung führt bis zu den elliptischen Modulfunktionen und bis zur Transformationstheorie der elliptischen Funktionen.

Der dritte Abschnitt, die geometrische Funktionentheorie Courants, der in der zweiten Auflage die Hälfte des ganzes Buches einnimmt, weicht in seinem Charakter von den Hurwitzschen Abschnitten wesentlich ab und ist durchaus selbständig. Die Darstellung, die von der Cauchy-Riemannschen Definition der analytischen Funktion ausgeht, führt unter ständiger Betonung und Nutzbarmachung des Zusammenhangs mit der Potentialtheorie sehr rasch und konsequent zu den Hauptproblemen und den wichtigsten Theoremen der geometrischen Funktionentheorie. Das Dirichletsche Prinzip, das bekanntlich von Riemann zum Beweis seiner funktionentheoretischen Existenzsätze benutzt, von Weierstraß aber abgelehnt und erst später von Hilbert wieder aufgenommen wurde, ist von Courant hier (und zum Teil schon in früheren Arbeiten) zu einem der wichtigsten Beweismittel der geometrischen Funktionentheorie ausgebildet worden.

Für den Leserkreis der vorliegenden Zeitschrift dürfte dieser dritte Abschnitt des Buches von ganz besonderem Interesse und von größtem Nutzen sein: Nicht nur wegen der Wichtigkeit, die den Methoden und Hauptsätzen der konformen Abbildung in den Anwendungen zukommt; nicht nur wegen der schon erwähnten Hervorhebung der Beziehungen zwischen Funktionen- und Potentialtheorie und zwischen verschiedenartigen mathematischen Disziplinen überhaupt; sondern auch wegen der lehrreichen und anregenden Einblicke in Gebiete, die im Vordergrund der mathematischen Forschungsarbeit entweder kürzlich gestanden haben oder noch stehen: die Theorie der algebraischen Funktionen, die Theorie der konformen Abbildung und der Uniformisierung und die Topologie; die große Bedeutung der letzteren für Geometrie und Analysis dürfte durch die Courantsche Darstellung auch dem Fernstehenden deutlich gemacht werden.

Berlin. G. Feigl. 805

Dr. ALBERT **KIEFER,** Leitfaden für elementares technisches Rechnen. Zum Gebrauch für technische Assistentinnen, Techniker usw. Verlag von Moritz Diesterweg, Frankfurt a. M. 1925. 72 S.

In dem mäßigen Umfang von 66 Seiten bietet hier ein kleines Werk die für das praktische Zahlen- und Buchstaben-Rechnen nötigen Vorschriften und Regeln dar, wie sie von technischen Assistentinnen, sogenannten Laborantinnen, Rechnern in technischen Büros u. dergl. als tägliches Handwerkszeug ihres Berufs gebraucht werden. Der in neun Abschnitte zerlegte Stoff umfaßt demgemäß die elementaren Rechenoperationen einschließlich der Logarithmen. Die ersten sechs Abschnitte behandeln die arithmetischen und algebraischen Grund-

gesetze, die linearen Gleichungen mit einer und zwei Unbekannten, die Proportionen, das logarithmische Rechnen, und zwar lehrt der fünfte den Gebrauch der (fünfstelligen) Logarithmentafel, der sechste die einfachsten Operationen am gewöhnlichen Rechenschieber. Hierauf folgen einige ausgewählte Beispiele aus der Rechenpraxis von chemischen und physikalischen Laboratorien (Analysen, Mischungen und Lösungen, Titrierungen, Ermittlung von Gasmengen und elektrischen Widerständen). Den Schluß bildet »quadratisches Rechnen«: Quadratische Gleichungen mit einer Unbekannten, Berechnung von Quadratzahlen und Quadratwurzeln nach den üblichen Methoden. Der Umfang des Büchleins, der noch einige leere Blätter, wohl zur Eintragung von Formeln, ergänzenden Notizen für den individuellen Gebrauch des Besitzers, enthält, verträgt noch gut die Aufnahme der vom Referenten vermißten, abgekürzten Multiplikation, Division und Wurzelziehung. Und an Stelle der lediglich buchstabenmäßig gegebenen, rein schulmäßig überlieferten und meist »unpraktischen« Methoden zur Auflösung der linearen Gleichungen wären besser die wirklich brauchbaren mittels Logarithmentafel oder Rechenschieber angebracht gewesen. Was aber den besonderen Wert dieses Leitfadens ausmacht, sind die knappe und dabei doch leicht faßliche, für den unmittelbaren Gebrauch am Rechentisch zugeschnittene Form der Anweisung, die Beachtung der Genauigkeit der Rechnung mit Rücksicht auf die Ungenauigkeit ihrer Daten und die überall aufgestellten »Warnungstafeln« vor Abwegen und typisch wiederkehrenden Fehlern des gedankenlosen Anfängers. Die Regeln sind zwar rezeptartig formuliert, aber mit kurzen Ableitungen oder Erläuterungen versehen. Der Verfasser wünscht kein mechanisches, sondern »zuerst verstandesmäßiges, dann Formelrechnen«. Auf mathematische Schärfe machen die gegebenen Herleitungen von Formeln und Regeln freilich keinen Anspruch. »Wer die Schädlichkeit dieser Schärfe«, so schreibt der Verfasser selbst im Vorwort, »im Schulunterricht kennengelernt hat, wird mir in dem Bestreben beipflichten, alles möglichst mundgerecht darzubieten, ohne die vielen »wenn« und »aber«, die ein lückenloser Beweis erfordert.«. So empfiehlt sich das Buch als ein für die bezeichneten Kreise nützliches Hilfsmittel.

M. Winkelmann. 765

R. **EMDEN,** Thermodynamik der Himmelskörper. Sonderausgabe aus der Encyklopädie der Mathematischen Wissenschaften. Mit einem Vorwort des Verfassers. Verlag von B. G. Teubner, Leipzig und Berlin 1926. S. 373—532. Preis geh. 6,40 M.

Es ist sehr zu begrüßen, daß wir in diesem Sonderdruck aus der Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften eine zusammenfassende Darstellung der theoretischen Grundlagen und Anwendungsmöglichkeiten einer Thermodynamik der Himmelskörper bekommen haben. Auch dem thermodynamisch gebildeten Nicht-Fachmann wird die Lektüre dieses Buches über ein Gebiet, das durch seine immer steigende Bedeutung allseitiges Interesse beansprucht, viel Freude bereiten. Allerdings wird gerade in diesen Kreisen die durch den ursprünglichen Zweck bedingte Knappheit und der Verzicht auf Wiedergabe von Forschungsergebnissen in Gestalt von Zahlentabellen oder Diagrammen schmerzlich empfunden werden.

Der Inhalt gliedert sich in vier Hauptteile: I. Einfache Umsätze thermischer und mechanischer Energie. II. Aufbau der Himmelskörper unter Berücksichtigung von thermischer Energie und Gravitationsenergie. III. Aufbau der Himmelskörper unter Berücksichtigung von thermischer Energie, Gravitations- und Strahlungsenergie. IV. Eingreifen von Quantentheorie und Atombau.

Berlin. Cl. v. Simson. 788

H. **KAYSER,** Geheimer Regierungsrat, Professor der Physik an der Universität Bonn. Tabelle der Hauptlinien der Linienspektra aller Elemente nach Wellenlängen geordnet. Verlag von Julius Springer, Berlin 1926. VI + 198. Preis geb. 24 M.

Für diese Neubearbeitung der 1913 in seinem Handbuch der Spektroskopie gegebenen Tabelle der stärksten Spektrallinien aller Elemente sind alle Spektroskopiker den Verfasser außerordentlich dankbar. Die Tabelle in ihrer neuen Form umfaßt ca. 19000 Linien zwischen 90850 und 124 Å. Bei den längsten und kürzesten, über 10000 und unter 2000 Å, also in den Gebieten, in denen sehr viele Linien nur von einem Beobachter gemessen sind, ist dessen Name hinzugefügt. Im mittleren Gebiet stellen die angegebenen Wellenlängen auf kritischer Durchsicht des vorhandenen Materials beruhende auf die internationale Skala bezogene Mittelwerte dar. Die mitgeteilte Stellenzahl ist so gewählt, daß nach Ansicht des Verfassers die letzte Stelle auf ± drei Einheiten richtig ist. Neben der Wellenlänge ist das Element angegeben, dem die betreffende Linie zugeordnet wird, wobei die einzelnen Ionisationsstufen der Elemente wie üblich durch Beifügung römischer Ziffern unterschieden sind. Daneben sind Angaben über die Intensität der Linien im Bogen, Funken und Geißlerrohr gegeben, die naturgemäß nur einen groben Anhalt geben können.

Um dem Benutzer zu ermöglichen, die Tabelle auf dem Laufenden zu halten, ist sie auf Schreibpapier mit viel freiem Raum für Nachträge gedruckt.

Berlin. Cl. v. Simson. 789

**Ferner sind folgende Werke bei der Schriftleitung eingegangen (ausführliche Besprechung bleibt vorbehalten):**

**Nach Arbeiten von Staatsrat Dr.-Ing. e. h. ALEXANDER KOCH, z. Zt. Professor an der Technischen Hochschule zu Darmstadt, herausgegeben von Dr.-Ing. e. h. MAX CARSTANJEN.**

Von der Bewegung des Wassers und den dabei auftretenden Kräften. Grundlagen zu einer praktischen Hydrodynamik für Bauingenieure. Nebst einer Auswahl von Versuchen Kochs im Wasserbau-Laboratorium der Darmstädter Technischen Hochschule, zusammengestellt unter Mitwirkung von Studienrat Dipl.-Ing. L. **HAINZ.** Mit 331 Abb. im Text und auf 2 Tafeln sowie einem Bildnis. Verlag von Julius Springer, Berlin 1926. XII + 228 S. Preis geb. 28,50 *M*.

Dr.-Ing. G. **SACHS,** Mitarbeiter im Kaiser-Wilhelm-Institut für Metallforschung, Privatdozent an der Technischen Hochschule Berlin, und Dipl.-Ing. G. **FIEK,** Ständiges Mitglied im Materialprüfungsamt Dahlem. Der Zugversuch. Anleitung für die Ausführung und Auswertung der Versuche sowie für die Beurteilung der Ergebnisse. Mit 202 Abb. Akademische Verlagsgesellschaft m. b. H., Leipzig 1926. VII + 252 S. Preis geb. 15 *M*, brosch. 12 *M*.

M. **TRAMER,** Dr. phil. et med., Privatdozent der Universität Bern, Direktor der kant. Heil- und Pflegeanstalt Rosegg, Solothurn. Technisches Schaffen Geisteskranker. Mit 58 Abb. Verlag von R. Oldenbourg, München und Berlin 1926. 246 S. Preis geh. 12 *M*, geb. 14,50 *M*.

H. **GLAUERT,** M. A. Fellow of Trinity College Cambridge. The elements of Aerofoil and Airschrew Theory. University Press Cambridge 1926. 228 S.

Prof. Dr.-Ing. A. **STAUS,** Der Genauigkeitsgrad von Flügelmessungen bei Wasserkraftanlagen. Mit 15 Textabbildungen und 4 Zahlentafeln. Verlag von Julius Springer Berlin, 1926. 35 S. Preis 2,40 *M*.

Dr.-Ing. N. **KELEN,** Die Staumauern. Theorie und wirtschaftliche Bemessung mit besonderer Berücksichtigung der Eisenbetontalsperren und Beschreibung ausgeführter Bauwerke. Mit 307 Textabbildungen und Bemessungstafeln. Verlag von Julius Springer, Berlin 1926. VIII + 294 S. Preis geb. 39 *M*.

TULLIO **LEVI-CIVITA** e UGO **AMALDI,** Lezioni di Meccanica Razionale. Volume Secondo. Dianmica dei Sistemi con un numero finito di Gradi di Liberta. Parte Prima. Verlag Nocola Zanichelli, Bologna. IX + 327 S. Parte Seconda IX + 684 S.

**Ergebnisse der exakten Naturwissenschaften.** Herausgegeben von der Schriftleitung der »Naturwissenschaften«, fünfter Band. Mit 103 Abb. Verlag von Julius Springer, Berlin 1926. 329 S. Preis 21 *M*, geb. 22,50 *M*.

Dr.-Ing. TH. **WYSS,** Privatdozent für Statik und Brückenbau an der Technischen Hochschule Danzig. Die Kraftfelder in festen elastischen Körpern und ihre praktischen Anwendungen. Mit 432 Abb. im Text und auf 35 Tafeln. Verlag von Julius Springer, Berlin 1926. VIII + 368 S. Preis geb. 25,50 *M*.

Dr.-Ing. FRIEDRICH **REICH,** Umlenkung eines freien Flüssigkeitsstrahles an einer senkrecht zur Strömungsrichtung stehenden ebenen Platte. Mit 89 Abb. und 23 Zahlentafeln. Forschungsarbeiten auf dem Gebiete des Ingenieurwesens. Herausgegeben vom Verein deutscher Ingenieure. Heft 290. VDI-Verlag G. m. b. H., Berlin 1926. 74 S.

Dr.-Ing. e. h. JOHANN **SCHÜTTE,** Geh. Reg.-Rat und ordentlicher Professor. Der Luftschiffbau Schütte-Lanz 1909—1925. Verlag von R. Oldenbourg, München und Berlin 1926. 152 S. Preis 15 *M*, geb. 18 *M*.

Dr.-Ing. PAUL **BÖSS,** Baurat, Privatdozent an der Technischen Hochschule Karlsruhe. Berechnung der Wasserspiegellage. Mit 48 Abb., 2 Zahlentafeln und 7 Tafeln. Forschungsarbeiten auf dem Gebiete des Ingenieurwesens. Herausgegeben vom Verein deutscher Ingenieure. Heft 284. VDI-Verlag G.m.b.H., Berlin 1927. IV + 96 S. Preis 7,50 *M*.

# NACHRICHTEN

**Gesellschaft für angewandte Mathematik und Mechanik.** Sitzung der Ortsgruppe Göttingen am 29. Juni 1927. 1. Herr F. Bernstein berichtete über ein von ihm gefundenes Verfahren zur Bestimmung mehrerer überlagerter periodischer Anteile in empirisch gegebenen Funktionen. Das Verfahren, das hauptsächlich auf die Bestimmung der unbekannten Periodenlängen gerichtet ist, bedient sich einer Analogie zur Laplaceschen Transformation (Summen statt Integrale), durch die es gelingt, das transzendente Problem auf ein algebraisches zurückzuführen. Das Verfahren ist bereits an einem größeren Zahlenbeispiel erprobt und erweist sich als eine wesentliche Verbesserung gegenüber dem bisherigen Verfahren. 2. Herr L. Prandtl zeigte einen hydrodynamischen Film, der die Vorgänge bei der Wirbelbildung in schwach reibenden Flüssigkeiten illustriert.

Sitzung der Ortsgruppe Berlin am 8. Juli 1927. 1. Herr Ph. Frank aus Prag gibt eine Darstellung der geometrischen Optik in nicht homogenen Gebieten, die den anschaulichen Zusammenhang mit den Begriffsbildungen der Variationsrechnung erkennen läßt. 2. Herr W. Müller aus Dessau berichtet über die von ihm durchgeführte Berechnung der Fallschirmbewegung und über die Entwicklung von Fallschirmkonstruktionen.

Hauptversammlung in Kissingen am 20. und 21. September 1927. Folgende Vorträge sind vorgesehen. Ein ausführliches Programm geht den Mitgliedern gesondert zu.

Dienstag, den 20. September vorm.:

W. Prager-Darmstadt: Die Formänderungen von Raumfachwerken.

Th. Pöschl-Prag: Zur Theorie des Druckversuchs für zylindrische Körper.

R. v. Mises-Berlin: Bemerkungen zur Hydrodynamik.

A. Betz-Göttingen: Propellerfragen.

L. Prandtl-Göttingen: Vorführung eines hydrodynamischen Films.

Dienstag, den 20. September nachm.:

O. Föppl-Braunschweig: Angenäherte Berechnung von Schwingungszahlen mit Hilfe des Seilpolygons.

F. Bernstein-Göttingen: Die numerische Ermittlung verborgener Periodizitäten.

H. Pollaczek-Geiringer-Berlin: Theorie der Statistik seltener Ereignisse.

E. J. Gumbel-Heidelberg: Das Zufallsgesetz des Sterbens.

M. Grübler-Dresden: Ueber den Gewichtsbegriff.

Mittwoch, den 21. September vorm.:

K. Popoff-Sofia: Die Integrale der Differentialgleichungen als Funktion der auftretenden Parameter betrachtet und ihre Bedeutung für die Mechanik.

G. Hamel-Berlin: Ueber eine mit dem Problem der Rakete zusammenhängende Aufgabe der Variationsrechnung.

F. Noether-Breslau: Ueber Magnetfelder in Transformatoren.

F. Rehbock-Berlin: Problemstellung einer linearen darstellenden Geometrie.

M. Herzberger-Wetzlar: Ueber die bestmögliche optisch realisierbare Abbildung durch nicht homozentrische Bündel großer Apertur.

Die Geschäftssitzung findet Mittwoch vormittag 9 Uhr ebenfalls in Kissingen statt.

Sonderveranstaltung Berlin im Oktober 1927. Die für die Sonderveranstaltung anläßlich der Werkstofftagung angemeldeten Vorträge sind in Heft 3 mitgeteilt worden. Das endgültige Programm geht den Mitgliedern zeitgerecht zu.

**Versammlung Deutscher Philologen und Schulmänner.** Auf der 56. Versammlung deutscher Philologen und Schulmänner die vom 27. bis 30. September in Göttingen stattfindet, wird in der dritten allgemeinen Sitzung Herr R. Pohl-Göttingen einen Experimentalvortrag »Ueber den Flug« halten. In der Sektion X für Mathematik und Physik sind verschiedene Vorträge aus dem Bereiche der angewandten Mathematik und Mechanik vorgesehen. Hervorgehoben sei die Ankündigung von O. Toeplitz-Kiel: Das Wechselspiel zwischen absoluter und angewandter Mathematik und die daraus für den Unterricht sich ergebenden Probleme.

**Zweiter Internationaler Kongreß für angewandte Mechanik in Zürich.** Der Verhandlungsbericht, der die Wiedergabe sämtlicher auf dem Kongreß gehaltenen Vorträge enthält, herausgegeben im Auftrage des Organisationskomitees von Prof. Dr. E. Meißner in Zürich, ist soeben im Verlag Orell Füßli, Zürich und Leipzig erschienen. Der stattliche Band von 545 S. und 33 Tafeln in Quart ist zum Preise von 65 Fr. durch alle Buchhandlungen zu beziehen.

**Emil Waelsch-Stiftung.** Die Deutsche Gesellschaft für Wissenschaft und Kunst in Brünn hat beschlossen, zum Andenken an ihren verstorbenen Präsidenten, eine Emil Waelsch-Stiftung zu begründen, deren Ertrăgnis Hörern der Deutschen Technischen Hochschule in Brünn zukommen soll, die besondere Leistungen auf dem Gebiete der Geometrie aufweisen. Ein von zahlreichen Hochschullehrern unterzeichneter Aufruf wendet sich an die Kollegen, Freunde und ehemaligen Schüler von Waelsch mit der Aufforderung, zum Stiftungskapital beizutragen. Die Mährische Escomptebank in Brünn nimmt Zahlungen unter der Bezeichnung »Emil Waelsch-Fonds« entgegen.

**Persönliches.** Herr Dr. Saxer ist zum o. Prof. der darstellenden Geometrie (Nachfolger von M. Großmann) an der Techn. Hochschule in Zürich ernannt worden.

Herr Prof. Dr. E. Salkowski in Hannover wurde als o. Prof. der darstellenden Geometrie und praktischen Mathematik (Nachfolger von G. Hessenberg) an die Techn. Hochschule Charlottenburg berufen.

Frau Dr. Hilda Pollaczek-Geiringer hat sich an der Philosophischen Fakultät der Universität Berlin als Privatdozent für angewandte Mathematik habilitiert.

Hr. Prof. Dr. Dr.-Ing. e. h. Reinhold Rüdenberg, Chefelektriker der Siemens-Schuckertwerke, ist zum Honorarprofessor für Starkstromtechnik an der Techn. Hochschule Charlottenburg ernannt worden.

Hr. Prof. Dr. Alois Timpe, bisher an der Landwirtsch. Hochschule Berlin, ist im Zusammenhang mit der Verlegung der Landmesser-Ausbildung an die Techn. Hochschule zum ord. Professor der Mathematik an der Techn. Hochschule Charlottenburg ernannt worden.

Hr. Prof. Dr. Dr.-Ing. e. h. K. W. Wagner bisher Präsident des Telegraphentechnischen Reichsamts ist zum o. Prof. für Schwingungslehre an der Techn. Hochschule Charlottenburg ernannt worden.

Hr. Geh. H.-R. Prof. Dr. Rudolf Mehmke in Stuttgart ist aus Anlaß seines siebzigsten Geburtstages von der Techn. Hochschule Stuttgart, an der er lange Jahre hindurch gewirkt hat, zum Dr.-Ing. ehrenhalber ernannt worden.

**(Redaktionsschluß 31. August 1927.)**

Für die Schriftleitung verantwortlich: Professor Dr. von Mises, Berlin NW 87, Siegmundshof 9; für den Anzeigenteil: Peter Valerius, Berlin NW 40. — VDI-Verlag G. m. b. H., Berlin NW 7. Druck von A. W. Schade, Berlin N 39.